

Übersetzerbau: Übung 01

von

Naja v. Schmude (4127652), Lisa Dohrmann (4130066)

Aufgabe 1

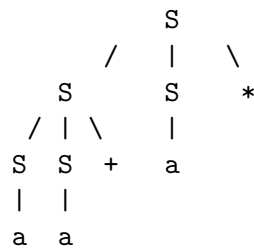
Gegeben ist folgende kontextfreie Grammatik:

$$S \rightarrow SS+ \mid SS* \mid a$$

- a) Die gegebene Zeichenfolge kann wie folgt erzeugt werden:

$$S \rightarrow SS* \rightarrow SS + S* \xrightarrow{3} aa + a*$$

- b) Parse-Baum für $aa + a*$



- c) Die Grammatik erzeugt die Sprache, die alle arithmetischen Ausdrücke in Postfixnotation mit den Operatoren $+$, $*$ enthält. In jedem Schritt (außer bei $S \rightarrow a$) werden der Zeichenfolge zwei Operanden (die noch weiter abgeleitet werden müssen) und ein Operator hinzugefügt, sodass sich beliebige arithmetische Ausdrücke aufbauen lassen.

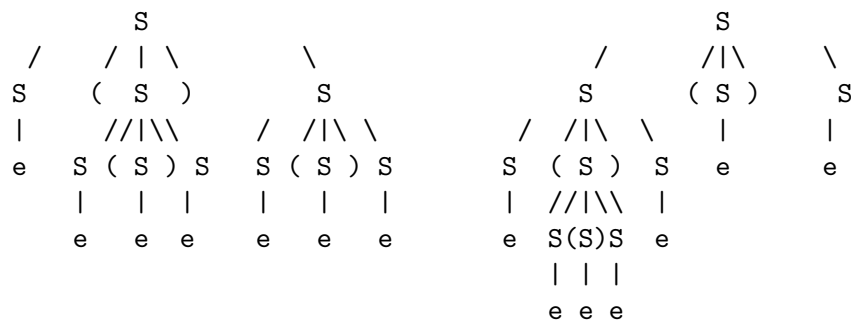
Aufgabe 2

- a) $S \rightarrow 0S1 \mid 01$ erzeugt $L = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2\}$. In jedem Ableitungsschritt werden immer genau eine 0 und ein 1 hinzugefügt. Da das Wort nur aus der Mitte heraus verlängert werden kann, ist ausgeschlossen, dass der 1 jemals ein 0 folgen kann.
- b) $S \rightarrow +SS \mid -SS \mid a$ erzeugt die Sprache, die alle arithmetischen Ausdrücke mit den Operatoren $+$, $-$ in Präfixnotation enthält. Wie bei 1.c) ist es auch hier so, dass in jedem Schritt zwei Operanden und ein Operator eingefügt werden und sich damit beliebige, korrekte arithmetische Ausdrücke konstruieren lassen.
- c) $S \rightarrow S(S)S \mid \epsilon$ erzeugt alle korrekt verschachtelten Klammerausdrücke. Durch die gegebene Regel wird in jedem Schritt ein Klammerpaar dem Ausdruck hinzugefügt. Dadurch wird verhindert, dass Wörter mit einer ungleichen Anzahl an öffnenden und schließenden Klammern entstehen können.

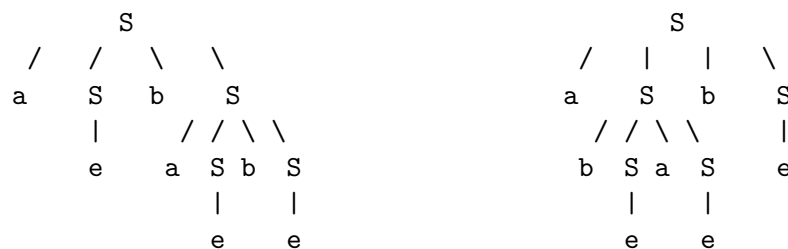
- d) $S \rightarrow aSba \mid bSaS \mid \epsilon$ erzeugt $L = \{w \mid w \text{ enthält genauso viele } as \text{ wie } bs\}$. Durch die gegebenen Produktionen werden dem Wort in jedem Schritt genau ein a und ein b hinzugefügt, es ist daher unmöglich, dass die Anzahl der as in irgendeinem Schritt von der der bs abweicht. Es wird jede mögliche Kombinationen aus a und b erreicht, da die Regeln es ermöglichen, nach jedem eingefügten Terminalzeichen eine weitere Produktion anzuwenden und damit beliebige Ketten aufzubauen.
- e) $S \rightarrow a \mid S + S \mid SS \mid S* \mid (S)$ erzeugt die Sprache, die sowohl arithmetische Ausdrücke mit den Operatoren $+, *$ in Infixnotation (z.B. $(a + a) * a$) als auch in Postfixnotation (z.B. $aa + a*$) enthält. Allerdings lassen sich auch nicht korrekte Ausdrücke wie $a*, a * +a$ erzeugen.

Aufgabe 3

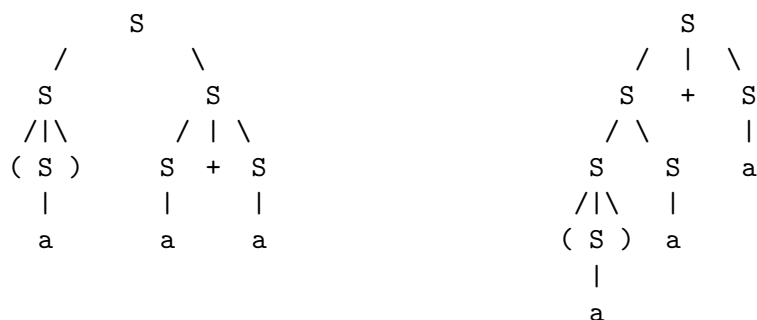
- a) Eindeutig.
- b) Eindeutig.
- c) Mehrdeutig. Man betrachtet z.B. das Wort $w = (()())$. Es gibt mehr als einen Parse-Baum, mit dem es aus der Grammatik hergeleitet werden kann.



- d) Mehrdeutig. Für das Wort $w = abab$ gibt es verschiedene Parse-Bäume.



- e) Mehrdeutig. Für das Wort $w = (a)a + a$ gibt es mehr als einen Parse-Baum.



Aufgabe 4

- a) $\text{digit} \rightarrow 0 \mid \dots \mid 9$
 $\text{id} \rightarrow a \mid \dots \mid z$
 $\text{fac} \rightarrow \text{digit} \mid \text{id} \mid (\text{exp})$
 $\text{term} \rightarrow \text{term} * \text{fac} \mid \text{term} / \text{fac} \mid \text{fac}$
 $\text{exp} \rightarrow \text{exp} + \text{term} \mid \text{exp} - \text{term} \mid \text{term}$
- b) $\text{un} \rightarrow (+ \text{fac}) \mid (- \text{fac})$
 $\text{fac} \rightarrow \text{digit} \mid \text{id} \mid (\text{exp}) \mid \text{un}$

Aufgabe 5

Wir führen eine Induktion über die Anzahl der inneren Knoten n im Parsebaum. n entspricht damit der Anzahl der angewandten Produktionen. Sei $w = w_1 w_2 \dots w_n$ das Wort, das aus n Ableitungsschritten entstanden ist.

I.A. $n = 1$: In nur einem Ableitungsschritt können nur die Wörter $w_1 = 11 = 3_{10}$ und $w_2 = 1001 = 9_{10}$ erzeugt werden, welche offensichtlich durch drei teilbar sind.

I.S. $n = n + 1$: Wir betrachten nun das Wort $w' = w_1 w_2 \dots w_n w_{n+1}$, das in $n + 1$ Ableitungsschritten entstanden ist. Nach Induktionsannahme ist $w = w_1 w_2 \dots w_n$ eine durch drei teilbare Binärzahl. Des Weiteren gehen wir von einer Linksableitung aus, sodass w nur die Struktur $X \text{ num}$ oder $X \text{ num } 0$ mit $X \in T^*$ haben kann. Wir sehen uns nun die möglichen Produktionen für $w \rightarrow w'$ an, wobei wir zunächst $w = X \text{ num}$ annehmen.

- $\text{num} \rightarrow 1001$: Die Anwendung der Produktion entspricht einer bitweisen Verschiebung von w um vier Stellen nach links (Multiplikation mit 2^4) und einer Addition von 1001. Die Multiplikation einer durch drei teilbaren Zahl mit $2^k, k \in \mathbb{N}$ ergibt wieder eine durch drei teilbare Zahl. Die Addition zweier durch drei teilbaren Zahlen ist ebenfalls wieder durch drei teilbar.
- $\text{num} \rightarrow 11$: Die Anwendung dieser Produktion entspricht einer bitweisen Verschiebung von w um zwei Stellen (Multiplikation mit 2^2) und einer Addition von 11. Wie in a. beschrieben ist die dadurch entstandene Zahl weiterhin durch drei teilbar.

Für $w = X \text{ num } 0$ gelten die Aussagen ebenfalls, da die zusätzliche Null am Ende nur eine weitere Multiplikation mit zwei bewirkt, welches die Teilbarkeit durch drei erhält.

□