Theoretische Physik für LAK III: Übung 7

von
Naja v. Schmude (4127652), Gruppe: Montag

Aufgabe 1

Es ist die Relation $\int dx \phi^*(x)\hat{F}\psi(x) = \int dx(\hat{F}^*\phi^*(x))\psi(x)$ für die gegebenne Funktionen und Operatoren zu überprüfen.

a) Sei $\hat{F} = -i\frac{d}{dx}$, $\phi(x) = A\sin\frac{n\pi x}{L}$, $\psi(x) = B\sin\frac{2n\pi x}{L}$ und $x \in [0, L]$.

Wir rechnen zunächst die linke Seite der zu prüfenden Gleichung aus.

$$\int_0^L A\sin\frac{n\pi x}{L} * \left(-i\frac{d}{dx}B\sin\frac{2\pi n x}{L}\right)dx$$

$$= -iAB\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}\left(\frac{2\pi n}{L}\cos\frac{2\pi n x}{L}\right)dx$$

$$= -iAB\frac{2\pi n}{L} * \int_0^L \frac{1}{2}\left(\sin\frac{n\pi x - 2\pi n x}{L} + \sin\frac{n\pi x + 2\pi n x}{L}\right)dx$$

$$= -iAB\frac{\pi n}{L} * \left(\int_0^L \sin\frac{-n\pi x}{L}dx + \int_0^L \sin\frac{3n\pi x}{L}dx\right)$$

$$= -iAB\frac{\pi n}{L} * \left(\left[\frac{L}{n\pi}\cos\frac{-n\pi x}{L}\right]_0^L + \left[\frac{-L}{3n\pi}\cos\frac{3n\pi x}{L}\right]_0^L\right)$$

$$= -iAB\frac{\pi n}{L} * \left(\frac{L}{n\pi}\underbrace{\cos(-n\pi)}_{=(-1)^n} - \frac{L}{n\pi} + \frac{-L}{3n\pi}\underbrace{\cos(3n\pi)}_{=(-1)^n} - \frac{-L}{3n\pi}\right)$$

$$- iAB\frac{\pi n}{L}\left((-1)^n\frac{2L}{3n\pi} - \frac{2L}{3n\pi}\right)$$

Jetzt kommt die rechte Seite:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^L \left(i\frac{d}{dx}A\sin\frac{n\pi x}{L}\right) B\sin\frac{2n\pi x}{L}dx \\
&= iAB\int_0^L \frac{n\pi}{L}\cos\frac{n\pi x}{L} * \sin\frac{2n\pi x}{L}dx \\
&= iAB\frac{n\pi}{L} * \int_0^L \frac{1}{2}\left(\sin\frac{2n\pi x - n\pi x}{L} + \sin\frac{2n\pi x + n\pi x}{L}\right) dx \\
&= iAB\frac{n\pi}{2L} * \left(\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}dx + \int_0^L \sin\frac{3n\pi x}{L}dx\right) \\
&= iAB\frac{n\pi}{2L} * \left(\left[\frac{-L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\right]_0^L + \left[\frac{-L}{3n\pi}\cos\frac{3n\pi x}{L}\right]_0^L\right) \\
&= iAB\frac{n\pi}{2L} * \left(\frac{-L}{n\pi}\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} - \frac{-L}{n\pi} + \frac{-L}{3n\pi}\underbrace{\cos(3n\pi)}_{=(-1)^n} - \frac{-L}{3n\pi}\right) \\
&= iAB\frac{n\pi}{2L}\left((-1)^n\frac{-4L}{3n\pi} + \frac{4L}{3n\pi}\right) = -iAB\frac{n\pi}{L}\left((-1)^n\frac{2L}{3n\pi} - \frac{2L}{3n\pi}\right)
\end{aligned}
$$

Linke und rechte Seite sind also identisch.

b) Sei $\hat{F} = ix$, $\phi(x) = A\exp[-\alpha x^2]$, $\psi(x) = B$ und $x \in [0, L]$.

Wir setzen wieder ein. Zunächst die linke Seite:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^L A\exp[-\alpha x^2] * ix * Bdx \\
&= iAB\int_0^L x\exp[-\alpha x^2]dx \\
&= iAB\left[\frac{1}{-2\alpha}\exp[-\alpha x^2]\right]_0^L \\
&= iAB\left(\frac{1}{-2\alpha}\exp[-\alpha L^2] - \frac{1}{-2\alpha}\right)
\end{aligned}
$$

Und jetzt in die rechte ...

$$
\begin{aligned}
&\int_0^L \left(-ix * A\exp[-\alpha x^2]\right) * Bdx \\
&= -iAB\int_0^L x\exp[-\alpha x^2]dx \\
&= -iAB\left[\frac{1}{-2\alpha}\exp[-\alpha x^2]\right]_0^L \\
&= -iAB\left(\frac{1}{-2\alpha}\exp[-\alpha L^2] - \frac{1}{-2\alpha}\right)
\end{aligned}
$$

Wir sehen, dass die Gleichheit von linker und rechter Seite nicht gegeben ist.

c) Sei $\hat{F} = \frac{d^2}{dx^2}$, $\phi(x) = Ai\sin\frac{n\pi x}{L}$, $\psi(x) = B\sin\frac{m\pi x}{L}$ und $x \in [0, L]$.

Wir setzen wieder in die linke Seite ein.

$$\int_0^L -Ai\sin\frac{n\pi x}{L} * \frac{d^2}{dx^2}B\sin\frac{m\pi x}{L}dx$$
$$= -iAB\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L} * \frac{d}{dx}\frac{m\pi}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx$$
$$= -iAB\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L} * \frac{m^2\pi^2}{L^2}\left(-\sin\frac{m\pi x}{L}\right)dx$$
$$= iAB\frac{m^2\pi^2}{L^2} * \int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}dx$$

Von vorhergehenden Übungsblättern wissen wir, dass $\frac{2}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}$ ein Orthonormalsystem bildet und daher für $m \neq n$ das Integral null ergibt. Der Koeffizient spielt hierbei keine Rolle. Es gilt also, dass die linke Seite gleich 0 ist.

Jetzt zur rechten Seite.

$$\int_0^L \left(\frac{d^2}{dx^2} - Ai\sin\frac{n\pi x}{L}\right) * B\sin\frac{m\pi x}{L}dx$$
$$= -iAB\int_0^L \left(\frac{d}{dx}\frac{n\pi}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\right) * \sin\frac{m\pi x}{L}dx$$
$$= -iAB\int_0^L \frac{-n^2\pi^2}{L^2}\sin\frac{n\pi x}{L} * \sin\frac{m\pi x}{L}dx$$
$$= iAB\frac{n^2\pi^2}{L^2}\underbrace{\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}dx}_{=0}$$
$$= 0$$

Linke und rechte Seite sind also identisch.

d) Der Operator aus a) und c) ist im Bezug auf diese Funktionen hermitisch, da die Gleichungen jeweils erfüllt sind. Der Operator von b) hingegen nicht, da die Gleichung nicht erfüllt ist.

Aufgabe 2

Es ist der unendliche Potenzialtopf der Breite 2α mit linkes Ende bei $-\alpha$ gegeben, in dem sich ein Elektron im Zustand $f(x) = A(\alpha^2 - x^2)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet.

a) Es ist die Normierungskonstante A zu bestimmen. Dazu muss gelten

$$\int |f(x)|^2 dx = 1$$

$$
\begin{aligned}
1 &= \int_{-\alpha}^{\alpha} |A(\alpha^2 - x^2)|^2 dx \\
&= \int_{-\alpha}^{\alpha} A^2(\alpha^4 - 2\alpha^2 x^2 + x^4) dx \\
&= A^2 \left[\alpha^4 x - \frac{2}{3}\alpha^2 x^3 + \frac{1}{5}x^5\right]_{-\alpha}^{\alpha} \\
&= A^2 \left(\alpha^5 - \frac{2}{3}\alpha^5 + \frac{1}{5}\alpha^5 - \left(\alpha^4(-\alpha) - \frac{2}{3}\alpha^2(-\alpha)^3 + \frac{1}{5}(-\alpha)^5\right)\right) \\
&= A^2\alpha^5(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}) \\
&= A^2\alpha^5 \frac{16}{15} \\
A^2 &= \frac{15}{16\alpha^5} \\
A &= \frac{\sqrt{15}}{4\sqrt{\alpha^5}}
\end{aligned}
$$

b) Es sind die Entwicklungskoeffizienten a_n zu bestimmen bezüglich der Eigenfunktionen. Für n gerade sei $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \cos \frac{n\pi x}{2\alpha}$. Für ungerade n gelte $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \sin \frac{n\pi x}{2\alpha}$. Die Entwicklungskoeffizienten berechnen sich dabei folgendermaßen: $a_n = \int \psi^*(x) f(x) dx$.
Wir fangen mit den geraden n an:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \cos \frac{n\pi x}{2\alpha} * A(\alpha^2 - x^2) dx \\
&= A\sqrt{\frac{1}{\alpha}} * \left(\alpha^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \frac{n\pi x}{2\alpha} dx - \int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 \cos \frac{n\pi x}{2\alpha} dx\right) \\
&= A\sqrt{\frac{1}{\alpha}} * \left(\alpha^2 \left[\frac{2\alpha}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2\alpha}\right]_{-\alpha}^{\alpha}\right. \\
&\left. - \left[\frac{2x}{(n\pi/2\alpha)^2} \cos \frac{n\pi x}{2\alpha} + \left(\frac{x^2}{(n\pi/2\alpha} - \frac{2}{(n\pi/2\alpha)^3}\right) \sin \frac{n\pi x}{2\alpha}\right]_{-\alpha}^{\alpha}\right) \\
&= A\sqrt{\frac{1}{\alpha}} * \left(\alpha^2 \left(\frac{2\alpha}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{2\alpha}{n\pi} \sin \frac{-n\pi}{2}\right)\right. \\
&\left. - \left[\frac{2x}{(n\pi/2\alpha)^2} \cos \frac{n\pi x}{2\alpha} + \left(\frac{x^2}{(n\pi/2\alpha} - \frac{2}{(n\pi/2\alpha)^3}\right) \sin \frac{n\pi x}{2\alpha}\right]_{-\alpha}^{\alpha}\right)
\end{aligned}
$$

Da n gerade ist, ist $\frac{n}{2}$ eine ganze Zahl und somit fallen alle $\sin \frac{n\pi}{2}$ raus, da sie gleich null sind.

$$
\begin{aligned}
a_n &= A\sqrt{\frac{1}{\alpha}} * \left(-\left[\frac{2x}{(n\pi/2\alpha)^2} \cos \frac{n\pi x}{2\alpha} + \left(\frac{x^2}{(n\pi/2\alpha} - \frac{2}{(n\pi/2\alpha)^3}\right) \sin \frac{n\pi x}{2\alpha}\right]_{-\alpha}^{\alpha}\right) \\
&= A\sqrt{\frac{1}{\alpha}} * \left(-\left(\frac{2\alpha}{(n\pi/2\alpha)^2} \cos \frac{n\pi}{2} + \left(\frac{\alpha^2}{(n\pi/2\alpha} - \frac{2}{(n\pi/2\alpha)^3}\right) \sin \frac{n\pi}{2}\right.\right. \\
&\left.\left. - \left(\frac{-2\alpha}{(n\pi/2\alpha)^2} \cos \frac{-n\pi}{2} + \left(\frac{(-\alpha)^2}{(n\pi/2\alpha} - \frac{2}{(n\pi/2\alpha)^3}\right) \sin \frac{-n\pi}{2}\right)\right)\right) \\
&= A\sqrt{\frac{1}{\alpha}} \left(-\frac{2\alpha}{(n\pi/2\alpha)^2} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{2\alpha}{(n\pi/2\alpha)^2} \cos \frac{n\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Mit dem gleichen Argument, dass n gerade ist, kann man sagen, dass $\cos\frac{n\pi}{2} = (-1)^n$.

$$a_n = -\frac{4\alpha}{(n\pi/2\alpha)^2} A\sqrt{\frac{1}{\alpha}}(-1)^n$$

Jetzt geht es weiter mit den ungeraden n.

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \sin\frac{n\pi x}{2\alpha} * A(\alpha^2 - x^2)dx \\
&= A\sqrt{\frac{1}{\alpha}} * \left(\alpha^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin\frac{n\pi x}{2\alpha}dx - \int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 \sin\frac{n\pi x}{2\alpha}dx\right) \\
&= A\sqrt{\frac{1}{\alpha}} * \left(\alpha^2 \left[-\frac{2\alpha}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2\alpha}\right]_{-\alpha}^{\alpha} - \int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 \sin\frac{n\pi x}{2\alpha}dx\right) \\
&= A\sqrt{\frac{1}{\alpha}} * \left(\alpha^2 \left(-\frac{2\alpha}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \left(-\frac{2\alpha}{n\pi}\cos\frac{-n\pi}{2}\right)\right) - \int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 \sin\frac{n\pi x}{2\alpha}dx\right)
\end{aligned}$$

Da n ungerade ist, ist der Bruch $\frac{n\pi}{2}$ sowas wie $\frac{3\pi}{2}$ und somit ist der Kosinus davon immer gleich 0.

$$\begin{aligned}
a_n &= A\sqrt{\frac{1}{\alpha}} * \left(-\int_{-\alpha}^{\alpha} x^2 \sin\frac{n\pi x}{2\alpha}dx\right) \\
&= A\sqrt{\frac{1}{\alpha}} * \left(-\left[\frac{2x}{(n\pi/2\alpha)^2}\sin\frac{n\pi x}{2\alpha} + \left(\frac{2}{(n\pi/2\alpha)^3} - \frac{x^2}{n\pi/2\alpha}\right)\cos\frac{n\pi x}{2\alpha}\right]_{-\alpha}^{\alpha}\right) \\
&= -A\sqrt{\frac{1}{\alpha}} * \left(\left(\frac{2\alpha}{(n\pi/2\alpha)^2}\sin\frac{n\pi}{2} + \left(\frac{2}{(n\pi/2\alpha)^3} - \frac{\alpha^2}{n\pi/2\alpha}\right)\underbrace{\cos\frac{n\pi}{2}}_{=0}\right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \left(\frac{-2\alpha}{(n\pi/2\alpha)^2}\sin\frac{-n\pi}{2} + \left(\frac{2}{(n\pi/2\alpha)^3} - \frac{(-\alpha)^2}{n\pi/2\alpha}\right)\underbrace{\cos\frac{-n\pi}{2}}_{=0}\right)\right)\right) \\
&= -A\sqrt{\frac{1}{\alpha}} * \left(\frac{2\alpha}{(n\pi/2\alpha)^2}\sin\frac{n\pi}{2} - \left(\frac{-2\alpha}{(n\pi/2\alpha)^2}\sin\frac{-n\pi}{2}\right)\right) \\
&= -A\sqrt{\frac{1}{\alpha}} * \left(\frac{2\alpha}{(n\pi/2\alpha)^2}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{2\alpha}{(n\pi/2\alpha)^2}\sin\frac{-n\pi}{2}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Wenn man sich die Sinuse anschaut, stellt man fest, dass die Vorzeichen jeweils verschieden sind. Daher haben sich die Sinus gegenseitig auf.

c) Der Energiewert E_1 tritt mit Wahrscheinlichkeit $|a_1|^2$ auf. Also nach obiger Berechnung mit Wahrscheinlichkeit 0, da $a_1 = 0$.

d)