Theoretische Physik für LAK III: Übung 5

von
Naja v. Schmude (4127652), Gruppe: Montag

Aufgabe 1

a) Die Hermite-Polynome lauten allgemein

$$H_n(y) = (-1)^n \exp\left[y^2\right] \frac{d^n}{dy^n} \exp\left[-y^2\right]$$

Nun ist $H_2(y)$ gesucht:

$$\begin{aligned}
H_2(y) &= (-1)^2 \exp\left[y^2\right] \frac{d^2}{dy^2} \exp\left[-y^2\right] \\
&= \exp[y^2] * ((-2y)\exp\left[-y^2\right])' \\
&= \exp[y^2]\left(-2\exp\left[-y^2\right] + 4y^2 \exp\left[-y^2\right]\right) \\
&= \exp[y^2 - y^2](4y^2 - 2) \\
&= 4y^2 - 2
\end{aligned}$$

Es soll nun überprüft werden, ob die Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dy^2} f(y) - 2y\frac{d}{dy} f(y) + (2\epsilon - 1) f(y) = 0$$

erfüllt ist für $f(y) = H_2(y)$. Dazu berechnet man zunächst die erste und zweite Ableitung von $H_2(y)$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dy} H_2(y) &= \frac{d}{dy}(4y^2 - 2) = 8y \\
\frac{d^2}{dy^2} H_2(y) &= \frac{d^2}{dy^2} 8y = 8
\end{aligned}$$

Jetzt setzt man ein:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dy^2} H_2(y) - 2y\frac{d}{dy} H_2(y) + (2\epsilon - 1) H_2(y) &= 0 \\
8 - 2y * 8y + (2\epsilon - 1)(4y^2 - 2) &= 0 \\
8 - 16y^2 + 8\epsilon y^2 - 4\epsilon - 4y^2 + 2 &= 0 \\
10 - 20y^2 + 8\epsilon y^2 - 4\epsilon &= 0 \\
(10 - 20y^2) + \epsilon(8y^2 - 4) &= 0 \\
\epsilon(-4 + 8y^2) &= -10 + 20y^2 \\
\epsilon &= \frac{-10 + 20y^2}{-4 + 8y^2} \\
\epsilon &= \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Für $\epsilon = \frac{5}{2}$ wird die Differentialgleichung korrekt durch das zweite Hermite-Polynom gelöst.

Die zugehörige Wellenfunktion $\psi_2(x)$ lautet mit $y = \sqrt{\alpha}x$

$$\begin{aligned}\psi_2(x) &= H_2(y)\exp\left[\frac{-y^2}{2}\right]\\ &= H_2(\sqrt{\alpha}x)\exp\left[\frac{-\alpha x^2}{2}\right]\\ &= (4\alpha x^2-2)\exp\left[\frac{-\alpha x^2}{2}\right]\end{aligned}$$

b) Es ist zu zeigen, dass $\psi_2(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} * \frac{1}{\sqrt{8}}\exp\left[\frac{-\alpha x^2}{2}\right] * (4ax^2-2)$ die stationäre Schrödingergleichung erfüllt, d.h.

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\psi_2''(x) + V(x)\psi_2(x) = E\psi_2(x)$$

Zunächst bestimmen wir die zweite Ableitung von $\psi_2(x)$:

$$\begin{aligned}\psi_2(x) &= \underbrace{\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} * \frac{1}{\sqrt{8}}}_{=c}(4ax^2-2)\exp\left[\frac{-\alpha x^2}{2}\right]\\ \psi_2'(x) &= c\left(8ax\exp\left[\frac{-\alpha x^2}{2}\right] + (4\alpha x^2-2)(-\alpha x)\exp\left[\frac{-\alpha x^2}{2}\right]\right)\\ &= c\exp\left[\frac{-\alpha x^2}{2}\right]\left(8\alpha x - 4\alpha^2x^3 + 2\alpha x\right)\\ &= c\exp\left[\frac{-\alpha x^2}{2}\right]\left(10\alpha x - 4\alpha^2x^3\right)\\ \psi_2''(x) &= c\left((-\alpha x)\exp\left[\frac{-\alpha x^2}{2}\right](10\alpha x - 4\alpha^2x^3) + \exp\left[\frac{-\alpha x^2}{2}\right](10\alpha - 12\alpha^2x^2)\right)\\ &= c\exp\left[\frac{-\alpha x^2}{2}\right]\left((-\alpha x)(10\alpha x - 4\alpha^2x^3) + (10\alpha - 12\alpha^2x^2)\right)\\ &= c\exp\left[\frac{-\alpha x^2}{2}\right]\left(-10\alpha^2x^2 + 4\alpha^3x^4 + 10\alpha - 12\alpha^2x^2\right)\\ &= c\exp\left[\frac{-\alpha x^2}{2}\right]\left(4\alpha^3x^4 + 10\alpha - 22\alpha^2x^2\right)\end{aligned}$$

Nun setzt man in die Schrödingergleichung ein:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}c\exp\left[\frac{-\alpha x^2}{2}\right]\left(4\alpha^3x^4 + 10\alpha - 22\alpha^2x^2\right) + V(x)c(4\alpha x^2-2)\exp\left[\frac{-\alpha x^2}{2}\right] = Ec(4\alpha x^2-2)\exp\left[\frac{-\alpha x^2}{2}\right]$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\left(4\alpha^3x^4 + 10\alpha - 22\alpha^2x^2\right) + V(x)(4\alpha x^2-2) = E(4\alpha x^2-2)$$

Aufgabe 2

Für die gegebene Wellenfunktion $\psi_{n,m}(x,y) = \frac{2}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi y}{L}$ des zweidimensionalen quadratischen Potentialtopfs mit Seitenlänge L sind folgende Mittelwerte und die Varianz von x zu berechnen.

$$
\begin{aligned}
< x > &= \int x|\psi_{n,m}(x,y)|^2 dxdy \\
&= \int_0^L x * \frac{2}{L}\sin^2\frac{n\pi x}{L}\frac{2}{L}\sin^2\frac{m\pi y}{L}dxdy \\
&= \frac{2}{L}\int_0^L x\sin^2\frac{n\pi x}{L}dx * \underbrace{\int_0^L \frac{2}{L}\sin^2\frac{m\pi y}{L}dy}_{=1} \\
&= \frac{2}{L}\int_0^L x\sin^2\frac{n\pi x}{L}dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
< x^2 > &= \int x^2|\psi_{n,m}(x,y)|^2 dxdy \\
&= \int_0^L x^2 * \frac{2}{L}\sin^2\frac{n\pi x}{L}\frac{2}{L}\sin^2\frac{m\pi y}{L}dxdy \\
&= \frac{2}{L}\int_0^L x^2\sin^2\frac{n\pi x}{L}dx * \underbrace{\int_0^L \frac{2}{L}\sin^2\frac{m\pi y}{L}dy}_{=1} \\
&= \frac{2}{L}\int_0^L x^2\sin^2\frac{n\pi x}{L}dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
< x^2 + y^2 > &= \int (x^2+y^2)|\psi_{n,m}(x,y)|^2 dxdy \\
&= \int_0^L (x^2+y^2) * \frac{2}{L}\sin^2\frac{n\pi x}{L}\frac{2}{L}\sin^2\frac{m\pi y}{L}dxdy \\
&= \underbrace{\int_0^L x^2 * \frac{2}{L}\sin^2\frac{n\pi x}{L}\frac{2}{L}\sin^2\frac{m\pi y}{L}dxdy}_{=<x^2>} + \underbrace{\int_0^L y^2 * \frac{2}{L}\sin^2\frac{n\pi x}{L}\frac{2}{L}\sin^2\frac{m\pi y}{L}dxdy}_{=<y^2>} \\
&=< x^2 > + < y^2 >
\end{aligned}
$$