Theoretische Physik III für Lehramtskandidaten, WS 2010/11
Blatt 7 zu den Übungen am 13. u. 15.12., Stefanie Russ
Abgabe: Spätestens 10.12., 12 Uhr, Zi. 1.4.38 (persönlich oder Briefkasten)

Bitte geben Sie Ihre Übungsgruppe an!

Hausaufgaben: (Je 2 Punkte.)
(α, A und B sind reelle positive Konstanten.)

1. Hermitesche Operatoren: (Je 0.5 Punkte)
Testen Sie die Relation (3.29) in $d = 1$ durch explizites Nachrechnen der rechten und linken Seite für einige Operatoren $\hat{F}$ und einige Eigenfunktionen Φ und ψ: (Berechnen Sie dabei die auftretenden Integrale.)
a.) $\hat{F} = -id/dx$, $\Phi(x) = A\sin(n\pi x/L)$, $\Psi(x) = B\sin(2n\pi x/L)$, $x \in [0, L]$.
b.) $\hat{F} = ix$, $\Phi(x) = A\exp[-\alpha x^2]$, $\Psi(x) = B$, $x \in [0, L]$.
c.) $\hat{F} = d^2/dx^2$, $\Phi(x) = Ai\sin(n\pi x/L)$, $\Psi(x) = B\sin(m\pi x/L)$, $x \in [0, L]$.
d.) Bei welchen Operatoren können Sie nach diesen Ergebnissen die Hermitizität ausschliessen? Bei welchen ist sie damit bewiesen?

2. Entwicklung nach Eigenfunktionen:
Im unendlichen Potenzialtopf der Breite 2α (linkes Ende bei $x = -\alpha$) befinde sich ein Elektron, das zum Zeitpunkt $t = 0$ durch folgende Wellenfunktion beschrieben werde:

$$f(x) = A(\alpha^2 - x^2).$$

a.) Bestimmen Sie die Normierungskonstante A. (0.25 Punkte)
b.) Berechnen Sie die Entwicklungskoeffizienten a_n (in Abhängigkeit von n und α) bezüglich der Eigenfunktionen dieses Potentialtopfs: (1 Punkt)

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{\alpha}}\cos\frac{n\pi x}{2\alpha}, \quad \text{falls n gerade und} \quad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{\alpha}}\sin\frac{n\pi x}{2\alpha}, \quad \text{falls n ungerade.}$$

$$\text{Hinweis:} \quad \int x^2\cos(bx)dx = \frac{2x}{b^2}\cos(bx) + \left(\frac{x^2}{b} - \frac{2}{b^3}\right)\sin(bx).$$

c.) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt als Ergebnis (der 1. Messung) der Energieeigenwert E_1 des unendlichen Potentialtopfes auf? (0.25 Punkte)
c.) Berechnen Sie nur unter der Verwendung dieser Ergebnisse: (0.5 Punkte)

$$\sum_{n=1,\text{ungerade}}^{\infty} n^{-6}.$$

Präsenzaufgabe: Berechnen Sie die Kommutatoren:

$$[\hat{p}_x, \hat{x}^{-1}], \qquad [\hat{L}_x, \hat{L}_z]$$

mit $\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y$ und $\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$

Verständnisfrage: Welche Bedeutung hat es, wenn ein Kommutator zwischen zwei Operatoren (nicht) verschwindet?