Theoretische Physik für LAK III: Übung 12

von
Naja v. Schmude (4127652), Gruppe: Montag

Aufgabe 1

a) Es soll η für $\mu_0 = 3$ berechnet werden. Es gilt: $\forall \mu > \mu_0 : \alpha_\mu = 0$. Zudem soll $l = 0$ gesetzt sein.

$$
\begin{aligned}
0 = \alpha_4 &= 2\alpha_3 \frac{\eta(l+3+1)-1}{(3+1)(3+2l+2)} \\
&= 2\alpha_3 \frac{4\eta - 1}{20}
\end{aligned}
$$

Da $\alpha_3 \neq 0$, muss der Nenner $4\eta - 1 = 0$ gelten. Also

$$\eta = \frac{1}{4}$$

Mit $\eta = \frac{1}{Z}\sqrt{-\frac{E}{E_R}}$ und $Z = 1$ im Wasserstoffatom folgt für die Energie

$$E = -\frac{1}{16}E_R = -0,85eV$$

b) Es ist für den Fall aus a) mit $\alpha_0 = 1$ die Formel $P(\rho)$ aufzustellen und zu überprüfen, ob diese die Gleichung $P''(\rho) + 2P'(\rho)(\frac{l+1}{\rho} - \eta) + P(\rho)\frac{2}{\rho}(1 - \eta(l+1)) = 0$ erfüllt.
Zunächst wird die Gleichung aufgestellt.

$$
\begin{aligned}
P(\rho) &= \sum_{\mu=0}^{\mu_0} \alpha_\mu \rho^\mu \\
&= \alpha_0 + \alpha_1\rho + \alpha_2\rho^2 + \alpha_3\rho^3 \\
\alpha_1 &= 2 * \alpha_0 \frac{\eta(0+1)-1}{(0+1)(0+2)} = 2 * \frac{\frac{1}{4} - 1}{2} = -\frac{3}{4} \\
\alpha_2 &= 2 * \alpha_1 \frac{\eta(1+1)-1}{(1+1)(1+2)} = 2 * \frac{-3}{4}\frac{\frac{1}{2} - 1}{6} = \frac{1}{8} \\
\alpha_3 &= 2 * \alpha_2 \frac{\eta(2+1)-1}{(2+1)(2+2)} = 2 * \frac{1}{8}\frac{\frac{3}{4} - 1}{12} = -\frac{1}{192} \\
P(\rho) &= 1 - \frac{3}{4}\rho + \frac{1}{8}\rho^2 - \frac{1}{192}\rho^3
\end{aligned}
$$

Jetzt kann die o.g. Gleichung überprüft werden.

$$
\begin{aligned}
P'(\rho) &= -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\rho - \frac{1}{64}\rho^2 \\
P''(\rho) &= \frac{1}{4} - \frac{1}{32}\rho
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P''(\rho)+2P'(\rho)\left(\frac{l+1}{\rho}-\eta\right)+P(\rho)\frac{2}{\rho}(1-\eta(l+1))&=0\\
\frac{1}{4}-\frac{1}{32}\rho+2\left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\rho-\frac{1}{64}\rho^2\right)\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{3}{4}\rho+\frac{1}{8}\rho^2-\frac{1}{192}\rho^3\right)\frac{2}{\rho}\left(1-\frac{1}{4}\right)&=0\\
\frac{1}{4}-\frac{1}{32}\rho+\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\rho-\frac{1}{32}\rho^2\right)\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{3}{4}\rho+\frac{1}{8}\rho^2-\frac{1}{192}\rho^3\right)\frac{3}{2\rho}&=0\\
\frac{1}{4}-\frac{1}{32}\rho-\frac{3}{2\rho}+\frac{3}{8}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\rho-\frac{1}{32}\rho+\frac{1}{128}\rho^2+\left(1-\frac{3}{4}\rho+\frac{1}{8}\rho^2-\frac{1}{192}\rho^3\right)\frac{3}{2\rho}&=0\\
\frac{1}{4}-\frac{1}{32}\rho-\frac{3}{2\rho}+\frac{3}{8}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\rho-\frac{1}{32}\rho+\frac{1}{128}\rho^2+\frac{3}{2\rho}-\frac{9}{8}+\frac{3}{16}\rho-\frac{1}{128}\rho^2&=0\\
\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{1}{2}-\frac{9}{8}}_{=0}\underbrace{-\frac{1}{32}\rho-\frac{1}{8}\rho-\frac{1}{32}\rho+\frac{3}{16}\rho}_{=0}\underbrace{-\frac{3}{2\rho}+\frac{3}{2\rho}}_{=0}\underbrace{-\frac{1}{128}\rho^2+\frac{1}{128}\rho^2}_{=0}&=0\\
0&=0
\end{aligned}
$$

Damit wäre diese Lösung für $P(\rho)$ verifiziert.