Theoretische Physik für LAK III: Übung 4

von
Naja v. Schmude (4127652), Gruppe: Montag

Aufgabe 1

a) Die Schrödingergleichung im Bereich $x < -L$ lautet $\psi(x) = 0$, da dort das Potenzial unendlich ist. Interessant ist also der zweite Bereich $-L \leq x \leq 0$. Wir stellen also die Schrödingergleichung auf und lösen sie. Unser Ansatz ist dabei wie immer $\psi(x) = e^{\lambda x}$.

$$
\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) &= E\psi(x) \\
-\frac{\hbar^2}{2m}\lambda^2 e^{\lambda x} &= E e^{\lambda x} \\
-\frac{\hbar^2}{2m}\lambda^2 &= E \\
\lambda &= \pm i\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}
\end{aligned}
$$

Auf die daraus entstehende e-Funktion kann man wieder die Euler-Formel anwenden und erhält mit $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

$$\psi(x) = c\cos(kx) + d\sin(kx)$$

Als Stetigkeitsbedingungen haben wir folgende:

- $\psi(x)$ muss stetig sein, d.h. $\psi(-L) = 0$ und $\psi(0) = \psi_0(0) = A_0$.
- Für $\psi'(x)$ gibt es noch die Stetigkeitsbedingung $\psi'(0) = \psi_0'(0)$, da auf beiden Seiten das Potenzial endlich ist.

b) Mit den unter a) genannten Bedingungen versucht man nun die Koeffizienten c und d vom mittleren Bereich zu bestimmen.

$$
\begin{aligned}
\psi(0) &= A_0 \\
A_0 &= c\cos(0) + d\sin(0) && \Rightarrow c = A_0 \\
\psi(-L) &= 0 \\
0 &= A_0\cos(-kL) + d\sin(-kL)
\end{aligned}
$$

Da $-kL$ nicht gleichzeitig die Sinus und die Cosinusfunktion null werden lassen kann, muss $d = 0$ gelten und $-kL = n\pi - \frac{\pi}{2}$. Also $k = \frac{\frac{\pi}{2} - n\pi}{L}$. Die Energie ergibt sich demnach aus

$$\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = k = \frac{\frac{\pi}{2} - n\pi}{L} \Leftrightarrow E = \frac{(\frac{\pi}{2} - n\pi)^2\hbar^2}{2mL^2}$$

Damit lautet hier die Wellenfunktion

$$\psi(x) = A_0\cos(\frac{\frac{\pi}{2} - n\pi}{L}x)$$

Wir schauen uns jetzt die verbleibende Stetigkeitsbedingung für die erste Ableitung an.

$$\begin{aligned}
\psi'(0) &= \psi_0'(0) \\
-A_0\frac{\frac{\pi}{2}-n\pi}{L}\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}-n\pi}{L}x\right) &= -\frac{A_0}{b^2}x\exp\left[\frac{-x^2}{2b^2}\right] \\
-A_0\frac{\frac{\pi}{2}-n\pi}{L}\sin 0 &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

Wir erhalten eine wahre Aussage, es ist also kein Problem, die Lösungen zu verbinden. Da die Energien in beiden Bereichen gleich sein muss, gilt

$$\begin{aligned}
\frac{(\frac{\pi}{2}-n\pi)^2\hbar^2}{2mL^2} &= \frac{\hbar^2}{2mb^2} \\
\frac{L^2}{(\frac{\pi}{2}-n\pi)^2} &= b^2 \\
b &= \frac{L}{(\frac{\pi}{2}-n\pi)}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Es ist die Schrödingergleichung für das Potenzial $V(x,y,z) = V_0(x^2+y^2+z^2)$ mit $V_0 = \frac{m\omega^2}{2}$ aufzustellen. Allgemein lautet die Schrödingergleichung

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\psi(x,y,z) + V(x,y,z)\psi(x,y,z) = E\psi(x,y,z)$$

Wir wählen den Produktansatz und sagen $\psi(x,y,z) = \psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z(z)$. Damit erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{-\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z(z) + V(x,y,z)\psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z(z) &= E\psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z(z) \\
\frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z(z) + V_0(x^2+y^2+z^2)\psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z(z) &= E\psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z(z) \\
\frac{-\hbar^2}{2m}(\psi_x''(x)\psi_y(y)\psi_z(z) + \psi_x(x)\psi_y''(y)\psi_z(z) + \psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z''(z)) + & \\
V_0(x^2+y^2+z^2)\psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z(z) &= E\psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z(z)
\end{aligned}$$

Wir teilen nun durch den Produktansatz $\psi(x,y,z) = \psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z(z)$:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{\psi_x''(x)}{\psi_x(x)}+\frac{\psi_y''(y)}{\psi_y(y)}+\frac{\psi_z''(z)}{\psi_z(z)}\right) + V_0(x^2+y^2+z^2) = E$$

Jetzt können die Gleichung in drei unabhängige Gleichungen separiert werden, so dass gilt $E = E_x + E_y + E_z$

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\psi_x''(x)}{\psi_x(x)} + V_0x^2 = E_x \qquad \Rightarrow \frac{-\hbar^2}{2m}\psi_x''(x) + V_0x^2\psi_x(x) = E_x\psi_x(x) \tag{1}$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\psi_y''(y)}{\psi_y(y)} + V_0y^2 = E_y \qquad \Rightarrow \frac{-\hbar^2}{2m}\psi_y''(y) + V_0y^2\psi_y(y) = E_y\psi_y(y) \tag{2}$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\psi_z''(z)}{\psi_z(z)} + V_0z^2 = E_z \qquad \Rightarrow \frac{-\hbar^2}{2m}\psi_z''(z) + V_0z^2\psi_z(z) = E_z\psi_z(z) \tag{3}$$

b)