Theoretische Physik für LAK III: Übung 11

von
Naja v. Schmude (4127652), Gruppe: Montag

Aufgabe 1

a)

b) Es ist die Gleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}-\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}-E\right)u(r)=0$$

zur Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}+\frac{2}{\rho}-\eta^2\right)u(\rho)=0$$

umgeformt werden. Dabei sollen folgende Ersetzungen benutzt werden: $a_B=\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$, $\rho=\frac{Zr}{a_B}$, $E_R=\frac{\hbar^2}{2ma_B^2}$ und $\eta=\frac{1}{Z}\sqrt{-\frac{E}{E_R}}$. Umgestellt folgt $r=\frac{\rho a_B}{Z}$ und $E=-\eta^2Z^2E_R$.

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}-\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}-E\right)u(r)=0$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial\left(\frac{\rho a_B}{Z}\right)^2}+\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m\left(\frac{\rho a_B}{Z}\right)^2}-\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\frac{\rho a_B}{Z}}+\eta^2Z^2E_R\right)u(\rho)=0$$

$$\left(-\frac{\hbar^2Z^2}{2ma_B^2}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{\hbar^2 l(l+1)Z^2}{2m\rho^2a_B^2}-\frac{Z^2e^2}{4\pi\epsilon_0\rho a_B}+\frac{\eta^2Z^2\hbar^2}{2ma_B^2}\right)u(\rho)=0$$

$$-\frac{\hbar^2Z^2}{2ma_B^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}+\frac{e^2ma_B}{2\hbar^2\pi\epsilon_0\rho}-\eta^2\right)u(\rho)=0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}+\frac{e^2ma_B}{2\hbar^2\pi\epsilon_0\rho}-\eta^2\right)u(\rho)=0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}+\frac{e^2m4\pi\epsilon_0\hbar^2}{2\hbar^2\pi\epsilon_0\rho me^2}-\eta^2\right)u(\rho)=0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}+\frac{2}{\rho}-\eta^2\right)u(\rho)=0$$

Aufgabe 2

Es ist zu zeigen, dass der Ansatz $u(\rho)=\exp[-\eta\rho]\rho^{l+1}P(\rho)$ eingesetzt in die eben berechnete Differentialgleichung zu

$$P''(\rho)+2P'(\rho)\left(\frac{l+1}{\rho}-\eta\right)+\frac{2P(\rho)}{\rho}(1-\eta(l+1))=0$$

führt.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + \frac{2}{\rho} - \eta^2\right)\exp[-\eta\rho]\rho^{l+1}P(\rho) = 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\exp[-\eta\rho]\rho^{l+1}P(\rho)}_{A} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\exp[-\eta\rho]\rho^{l+1}P(\rho) + \frac{2}{\rho}\exp[-\eta\rho]\rho^{l+1}P(\rho) - \eta^2\exp[-\eta\rho]\rho^{l+1}P(\rho) = 0$$

Betrachten wir zunächst den ersten Term A:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\exp[-\eta\rho]\rho^{l+1}P(\rho) &= \frac{\partial}{\partial\rho}\Big(-\eta\exp[-\eta\rho]\rho^{l+1}P(\rho) + \exp[-\eta\rho](l+1)\rho^l P(\rho) + \exp[-\eta\rho]\rho^{l+1}P'(\rho)\Big)\\ &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial\rho} - \eta\exp[-\eta\rho]\rho^{l+1}P(\rho)}_{Aa} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial\rho}\exp[-\eta\rho](l+1)\rho^l P(\rho)}_{Ab} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial\rho}\exp[-\eta\rho]\rho^{l+1}P'(\rho)}_{Ac}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Aa: \frac{\partial}{\partial\rho} - \eta\exp[-\eta\rho]\rho^{l+1}P(\rho) &= \eta^2\exp[-\eta\rho]\rho^{l+1}P(\rho) - \eta\exp[-\eta\rho](l+1)\rho^l P(\rho) - \eta\exp[-\eta\rho]\rho^{l+1}P'(\rho)\\ Ab: \frac{\partial}{\partial\rho}\exp[-\eta\rho](l+1)\rho^l P(\rho) &= -\eta\exp[-\eta\rho](l+1)\rho^l P(\rho) + \exp[-\eta\rho]l(l+1)\rho^{l-1}P(\rho) + \exp[-\eta\rho](l+1)\rho^l\\ Ac: \frac{\partial}{\partial\rho}\exp[-\eta\rho]\rho^{l+1}P'(\rho) &= -\eta\exp[-\eta\rho]\rho^{l+1}P'(\rho) + \exp[-\eta\rho](l+1)\rho^l P'(\rho) + \exp[-\eta\rho]\rho^{l+1}P''(\rho)\end{aligned}$$

In allen neun Termen taucht die Exponentialfunktion auf und ρ^{l-1}. Beides kann folglich ausgeklammert werden. Zudem können einige Terme zusammengefasst werden.

$$A: \exp[-\eta\rho]\rho^{l-1}\left(\eta^2\rho^2 P(\rho) - 2\eta(l+1)\rho P(\rho) - 2\eta\rho^2 P'(\rho) + l(l+1)P(\rho) + 2(l+1)\rho P'(\rho) + \rho^2 P''(\rho)\right)$$

Jetzt kann alles zusammen eingesetzt werden. Auch hier sieht man wieder, dass in allen Termen die Exponentialfunktion vorhanden ist ρ^{l-1}:

$$\begin{aligned}\exp[-\eta\rho]\rho^{l-1}\Big(\eta^2\rho^2 P(\rho) - 2\eta(l+1)\rho P(\rho) - 2\eta\rho^2 P'(\rho) + l(l+1)P(\rho) + 2(l+1)\rho P'(\rho) + \rho^2 P''(\rho)&\\ - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\rho^2 P(\rho) + \frac{2}{\rho}\rho^2 P(\rho) - \eta^2\rho^2 P(\rho)\Big) &= 0\\ -2\eta(l+1)\rho P(\rho) - 2\eta\rho^2 P'(\rho) + 2(l+1)\rho P'(\rho) + \rho^2 P''(\rho) + 2\rho P(\rho) &= 0\\ \rho^2 P''(\rho) + 2P'(\rho)((l+1)\rho - \eta\rho^2) + 2P(\rho)\rho(1 - \eta(l+1)) &= 0\\ P''(\rho) + 2P'(\rho)\left(\frac{l+1}{\rho} - \eta\right) + \frac{2P(\rho)}{\rho}(1 - \eta(l+1)) &= 0\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass die Differentialgleichung und der Ansatz zu der gewünschten Lösung führt.