Theoretische Physik für LAK III: Übung 3

von
Naja v. Schmude (4127652), Gruppe: Montag

Aufgabe 1

a) Es sollen die normierten Eigenfunktione $\psi(x,y)$ mit den zugehörigen Energiewerten E für den gegebenen 2D-Potentialtopf berechnet werden. Im Außenraum, in dem $V=\infty$ gilt, ist $\psi(x,y)=0$ und nur der Bereich mit $V=0$ von $x\in[0,a]$ und $y\in[0,2a]$ muss betrachtet werden. Damit die Funktion ein Teilchen korrekt in dem Potentialtopf beschreibt, muss die Funktion die Schrödingergleichung erfüllen. Es gilt also

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi(x,y)=E\psi(x,y)$$

Wir dieses 2D-Problem jeweils auf die eindimensionalen Potentialtöpfe zurück, dazu probieren wir den Produktansatz aus, d.h. $\psi(x,y)=\psi_x(x)\psi_y(y)$.

$$\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi_x(x)\psi_y(y) &= E\psi_x(x)\psi_y(y) \\
-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\psi_x''(x)\psi_y(y)+\psi_x(x)\psi_y''(y)\right) &= E\psi_x(x)\psi_y(y) \qquad \mid :\psi_x(x)\psi_y(y) \\
-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\psi_x''(x)}{\psi_x(x)}+\frac{\psi_y''(y)}{\psi_y(y)}\right) &= E
\end{aligned}$$

Jetzt können wir mit $E=E_1+E_2$ die Gleichung auseinander ziehen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi_x''(x)}{\psi_x(x)}=E_1 \tag{1}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi_y''(y)}{\psi_y(y)}=E_2 \tag{2}$$

Die entstandenen Gleichungen entsprechen jetzt wie gewünscht einem eindimensionalen Problem. Wir lösen beide nun getrennt.

1. Wir wählen den Standardansatz $\psi_x(x)=e^{\lambda x}$. Wir setzen ein und erhalten

$$\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\lambda^2 e^{\lambda x}}{e^{\lambda x}} &= E_1 \\
-\frac{\hbar^2}{2m}\lambda^2 &= E_1 \\
\lambda &= \pm i\frac{\sqrt{2E_1 m}}{\hbar}
\end{aligned}$$

Als allgemeine Lösung erhalten wir somit für $\psi_x(x)$

$$\psi_x(x)=c\cos\left(\underbrace{\frac{\sqrt{2E_1 m}}{\hbar}}_{=k_1}x\right)+d\sin\left(\frac{\sqrt{2E_1 m}}{\hbar}x\right)$$

Über die Stetigkeitsbedingungen bekommen wir einen Koeffizienten und E_1. Die Bedingungen lauten hier, dass $\psi_x(0) = 0$ und $\psi_x(a) = 0$.

$$\begin{aligned} \psi_x(0) &= 0 \\ 0 &= c\cos(0) + d\sin(0) && \Rightarrow c = 0 \\ \psi_x(a) &= 0 \\ 0 &= d\sin(k_1 a) && \Rightarrow k_1 a = n\pi \end{aligned}$$

Somit gilt für $k_1 = \frac{n\pi}{a}$. Wir können daraus auch gleich die Energie berechnen:

$$\frac{n\pi}{a} = \frac{\sqrt{2E_1 m}}{\hbar} \Leftrightarrow E_1 = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2a^2 m}$$

Um d zu erhalten, müssen wir $\psi_x(x)$ normieren, so dass die Wahrscheinlichkeitsdichte über das Intervall integriert 1 ergibt.

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^a |\psi_x(x)|^2 dx \\ &= d^2 \int_0^a sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx \\ &= \frac{d^2}{2}\left[\frac{-a}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) + x\right]_0^a \\ &= \frac{d^2}{2}\left(\frac{-a}{n\pi}\cos(n\pi)\sin(n\pi) + a + \frac{a}{n\pi}\cos 0 \sin 0\right) \\ &= \frac{d^2 a}{2} \\ d &= \sqrt{\frac{2}{a}} \end{aligned}$$

Es gilt also $\psi_x(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$.

2. Für die y-Richtung geht das natürlich analog. Wir erhalten nach Einsetzen des Ansatzes die allgemeine Lösung

$$\psi_y(y) = e\cos\left(\underbrace{\frac{\sqrt{2E_2 m}}{\hbar}}_{=k_2} y\right) + f\sin\left(\frac{\sqrt{2E_2 m}}{\hbar}y\right)$$

Mit den Stetigkeitsbedingungen geht es dann etwas anders weiter:

$$\begin{aligned} \psi_y(0) &= 0 \\ 0 &= e\cos(0) + f\sin(0) && \Rightarrow e = 0 \\ \psi_y(2a) &= 0 \\ 0 &= f\sin(2k_2 a) && \Rightarrow 2k_2 a = n\pi \end{aligned}$$

Somit gilt für $k_2 = \frac{n\pi}{2a}$. Wir können daraus auch gleich wieder die Energie berechnen:

$$\frac{n\pi}{2a} = \frac{\sqrt{2E_2 m}}{\hbar} \Leftrightarrow E_2 = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8a^2 m}$$

Jetzt normieren wir wieder um f zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
1 &= \int_0^{2a} |\psi_y(y)|^2 dx \\
&= f^2 \int_0^{2a} sin^2\left(\frac{n\pi}{2a}y\right) dy \\
&= \frac{f^2}{2}\left[\frac{-2a}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2a}y\right)\sin\left(\frac{n\pi}{2a}y\right) + y\right]_0^{2a} \\
&= \frac{f^2}{2}\left(\frac{-2a}{n\pi}\cos(n\pi)\sin(n\pi) + 2a + \frac{2a}{n\pi}\cos 0 \sin 0\right) \\
&= f^2 a \\
f &= \sqrt{\frac{1}{a}}
\end{aligned}$$

Es gilt also $\psi_y(y) = \sqrt{\frac{1}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{2a}y\right)$.

Insgesamt ergibt sich dann für $\psi(x,y)$:

$$\psi(x,y) = \psi_x(x)\psi_y(y) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n_1\pi}{a}x\right)\sqrt{\frac{1}{a}}\sin\left(\frac{n_2\pi}{2a}y\right)$$

Und für die Energie

$$E = E_1 + E_2 = \frac{n_1^2\pi^2\hbar^2}{2a^2m} + \frac{n_2^2\pi^2\hbar^2}{8a^2m} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2a^2m}\left(n_1^2 + \frac{n_2^2}{4}\right)$$

b) Entartung bedeutet, wenn verschiedenen ψ zum selben Energiewert führen.

- zufällig: Z.B. führen die Wellen mit $n_1 = 2, n_2 = 2$ und $n_1 = 1, n_2 = 4$ zum selben Energiewert.
- symmetrisch: ...

Aufgabe 2

Es ist zu zeigen, dass folgende Aussage gilt für $\psi_n(x) = \frac{2}{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

$$\int_0^L \psi_n(x)\psi_m(x)dx = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir machen eine Fallunterscheidung und betrachten beide Fälle einzeln.

1. Sei $n = m$. Dann folgt

$$\int_0^L \psi_n(x)\psi_n(x)dx = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) * \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Um das Integral zu lösen, machen wir eine partielle Integration mit ein paar Tricks:

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx &= \frac{2}{L}(\underbrace{\left[\frac{-L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) * \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_0^L}_{=0} \\
&- \int_0^L \frac{-L}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\frac{n\pi}{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx) \\
&= \frac{2}{L}\left(\int_0^L \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right) \\
&= \frac{2}{L}\left(\int_0^L 1-\sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right) \\
&= \frac{2}{L}\int_0^L 1dx - \frac{2}{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \qquad [+\frac{2}{L}\int \sin^2 \\
\frac{4}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx &= \frac{2}{L}[x]_0^L \quad |2 \\
\frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx &= 1
\end{aligned}
$$

Wir bekommen also eins raus, also stimmt der erste Teil schonmal!

2. Sei $m \neq n$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx &= \frac{2}{L}\int_0^L \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{n\pi - m\pi}{L}x\right) - \cos\left(\frac{n\pi + m\pi}{L}x\right)\right)dx \\
&= \frac{1}{L}\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi - m\pi}{L}x\right)dx - \frac{1}{L}\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi + m\pi}{L}x\right)dx \\
&= \frac{1}{L}\left[\frac{L}{n\pi - m\pi}\sin\left(\frac{n\pi - m\pi}{L}x\right)\right]_0^L \\
&- \frac{1}{L}\left[\frac{L}{n\pi + m\pi}\sin\left(\frac{n\pi + m\pi}{L}x\right)\right]_0^L \\
&= \frac{1}{L}\left(\frac{L}{n\pi - m\pi}\sin(n\pi - m\pi) - 0\right) \\
&- \frac{1}{L}\left(\frac{L}{n\pi + m\pi}\sin(n\pi + m\pi) - 0\right)
\end{aligned}
$$

Wenn m und n ganze Zahlen sind, dann sind die Ausdrücke $n+m$ bzw. $n-m$ auch ganze Zahlen und somit sind die Sinusausdrücke 0. Insgesamt bekommt man hier also als Ergebnis 0, die anfängliche Behauptung ist also richtig.

$\square$