Theoretische Physik für LAK III: Übung 10

von
Naja v. Schmude (4127652), Gruppe: Montag

Aufgabe 1

a) Es ist die Frage zu klären, ob $\hat{\sigma}_+$ nichtverschwindende Eigenwerte besitzt und wenn ja welche. Ein Eigenwertproblem hat allgemein die Form $Ax = \lambda x$. Bei dem Aufsteigeoperator gilt (nach dem was wir wissen)

$$\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Im ersten Fall handelt es sich also um einen verschwindenen Eigenwert und im zweiten Fall liegt garkein Eigenwertproblem vor, so dass man hier bei $\hbar$ nicht von einem Eigenwert sprechen kann.

b) Das Teilchen befindet sich im Spinzustand $\frac{1}{4}(1,0) + a(0,1)$ bezüglich der z-Achse. Zunächst soll dieser Zustand normiert werden.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + a^2 = 1$$
$$a^2 = \frac{15}{16}$$
$$a = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Der Zustand lautet also normiert $\frac{1}{4}(1,0) + \frac{\sqrt{15}}{4}(0,1)$.
Nun sind die Mittelwerte $< s_x >, < s_y >$ und $< s_z >$ zu berechnen.

$$\begin{aligned} < s_z > &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{15}}{4} \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{15}}{4} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{15}}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{\sqrt{15}}{4} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{2} \left(\frac{1}{16} - \frac{15}{16} \right) \\ &= -\frac{14\hbar}{32} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
< s_x > &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{15}}{4} \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{15}}{4} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{15}}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{15}}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\hbar}{2} \left(\frac{\sqrt{15}}{16} + \frac{\sqrt{15}}{16} \right) \\
&= \frac{\sqrt{15}\hbar}{16}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
< s_y > &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{15}}{4} \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{15}}{4} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{15}}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\frac{\sqrt{15}}{4} \\ i\frac{1}{4} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\hbar}{2} \left(-i\frac{\sqrt{15}}{16} + i\frac{\sqrt{15}}{16} \right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

c) An dem Teilchen soll nun in s_x gemessen werden. Dabei können die Messwerte $\pm\frac{\hbar}{2}$ auftreten. Zudem ist noch die Wahrscheinlichkeit für beide Messwerte zu bestimmen.

$$
\begin{aligned}
\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{15}}{4} \end{pmatrix} &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{15}}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{15}}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} &= a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow a &= \frac{\sqrt{15}}{4} \quad b = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Die Wahrscheinlichkeiten betragen

$$
\begin{aligned}
P\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) &= \left(\frac{\sqrt{15}}{4} \right)^2 = \frac{15}{16} \\
P\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) &= \left(\frac{1}{4} \right)^2 = \frac{1}{16}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

a) Es sind die Operatoren für $\hat{L}_z, \hat{L}_+, \hat{L}_-, \hat{L}_x$ und $\hat{L}_y$ als Matrizen anzugeben, wobei $|1,1\rangle = (1,0,0), |1,0\rangle = (0,1,0)$ und $|1,-1\rangle = (0,0,1)$ definiert ist.

$$\hat{L}_z|l,m\rangle = \hbar m|l,m\rangle$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \hbar\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow a = \hbar, d = 0, g = 0$$

$$\begin{pmatrix} \hbar & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \qquad \Rightarrow b = 0, e = 0, h = 0$$

$$\begin{pmatrix} \hbar & 0 & c \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\hbar\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow c = 0, f = 0, i = -\hbar$$

$$\hat{L}_z = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{L}_+|l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}|l,m+1\rangle$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \qquad \Rightarrow a = 0, d = 0, g = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\hbar\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow b = \sqrt{2}\hbar, e = 0, h = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}\hbar & c \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow c = 0, f = \sqrt{2}\hbar, i = 0$$

$$\hat{L}_+ = \sqrt{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{L}_-|l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m-1)}|l,m-1\rangle$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow a = 0, d = \sqrt{2}\hbar, g = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ \sqrt{2}\hbar & e & f \\ 0 & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow b = 0, e = 0, h = \sqrt{2}\hbar$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ \sqrt{2}\hbar & 0 & f \\ 0 & \sqrt{2}\hbar & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0} \qquad \Rightarrow c = 0, f = 0, i = 0$$

$$\hat{L}_- = \sqrt{2}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
I.\quad \hat{L}_+ &= \hat{L}_x + i\hat{L}_y && \Leftrightarrow \hat{L}_x = \hat{L}_+ - i\hat{L}_y \\
II.\quad \hat{L}_- &= \hat{L}_x - i\hat{L}_y && \Leftrightarrow \hat{L}_x = \hat{L}_- + i\hat{L}_y \\
\hat{L}_+ - i\hat{L}_y &= \hat{L}_- + i\hat{L}_y \\
2i\hat{L}_y &= \hat{L}_+ - \hat{L}_- \\
\hat{L}_y &= \frac{-i}{2}(\hat{L}_+ - \hat{L}_-) \\
&= \frac{-i}{2} * \sqrt{2}\hbar \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\
\hat{L}_y &= \frac{-i\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
\hat{L}_x &= \hat{L}_+ - i\hat{L}_y \\
&= \sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + i^2 \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

b) Es soll ein Zustand bestimmt werden, bei dem die Wahrscheinlichkeit bei einer Messung der z-Komponente des Drehimpulses den Zustand $m = 0$ zu finden $0,3$ beträgt.
Der Zustand $m = 0$ ist gleichbedeutend mit $|1,0\rangle = (0,1,0)$. Der gesuchte Zustand lässt sich als Superposition der Grundzustände schreiben:

$$
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Wir wissen, dass die Koeffizienten zum Quadrat den Einzelwahrscheinlichkeiten der Zustände entsprechen. Mit $p(|1,0\rangle) = 0.3$ folgt für $b^2 = 0,3$, also $b = \sqrt{0,3}$. Die Summe aller Einzelwahrscheinlichkeiten muss 1 ergeben, also gilt $a^2 + c^2 = 0,7$. Eine Möglichkeit wäre jetzt, dass a und c gleich groß sind, dann folgt als Zustand

$$
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{0,35} \\ \sqrt{0,3} \\ \sqrt{0,35} \end{pmatrix}
$$