Theoretische Physik für LAK II: Übung 5

von
Naja v. Schmude (4127652), Gruppe: II

Aufgabe 1

a) Man berechne $\vec{E}_{Dipol} = -\vec{\nabla}\phi_{Dipol}$ für das gegebene $\phi_{Dipol} = \frac{\vec{r}\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$.

$$\begin{aligned}
\vec{E}_{Dipol} &= -\vec{\nabla}\phi_{Dipol} \\
&= -\left(\frac{\partial\left(\frac{p_x x + p_y y + p_z z}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\right)}{\partial x}, \frac{\partial\left(\frac{p_x x + p_y y + p_z z}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\right)}{\partial y}, \frac{\partial\left(\frac{p_x x + p_y y + p_z z}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\right)}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

Man sieht, dass sich die drei Komponenten des Vektors analog verhalten, darum rechnen wir das jetzt nur explizit für E_x aus.

$$\begin{aligned}
E_x &= -\frac{\partial\left(\frac{p_x x + p_y y + p_z z}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\right)}{\partial x} \\
&= -\frac{4p_x\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3 - 4\pi\epsilon_0 * \frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2} * 2x * (p_x x + p_y y + p_z z)}{(4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3)^2} \\
&= -\frac{4p_x\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3 - 12\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+y^2+z^2} * x * (p_x x + p_y y + p_z z)}{(4\pi\epsilon_0)^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}^6} \\
&= -\frac{p_x\sqrt{x^2+y^2+z^2}^2 - 3x * (p_x x + p_y y + p_z z)}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5} \\
&= -\frac{p_x r^2 - 3x * \vec{r}\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^5} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3x\vec{r}\vec{p} - p_x r^2}{r^5}
\end{aligned}$$

Und damit ist man auch schon fertig, denn x entspricht einfach der x-Komponente von $\vec{r}$ und p_x entsprechend der von $\vec{p}$. Wie oben erwähnt gilt für die anderen Komponenten folgendes analog:

$$\begin{aligned}
E_y &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3y\vec{r}\vec{p} - p_y r^2}{r^5} \\
E_z &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3z\vec{r}\vec{p} - p_z r^2}{r^5}
\end{aligned}$$

b) Für $\vec{p} = (-a_0, 0)q_0 - (a_0, 0)q_0 = (-2a_0, 0)q_0$ und $\vec{r} = (0, a_0)$ soll jetzt das $\vec{E}$-Feld berechnet werden. Wir setzten einfach in die Ergebnisse von a) ein:

$$
\begin{aligned}
E_x &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2a_0q_0 * (a_0^2)}{a_0^5} \\
E_x &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q_0}{a_0^2} \\
E_y &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{0}{\sqrt{a_0^2}^5} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2