Theoretische Physik für LAK II: Übung 6

von
Naja v. Schmude (4127652), Gruppe: II

Aufgabe 1

a) Es ist die Kirchhoff'sche Knotenregel zu beweisen. Wir gehen von stationären Strömen aus, d.h. $\rho(\vec{r})$ ist zeitlich konstant. Für einen solchen Strom gilt dann $\vec{\nabla}\vec{j} = 0$. Wir entwickeln dies nun mit dem gauß'schen Integralsatz und erhalten

$$\iiint dV\vec{\nabla}\vec{j} = \iint \vec{j}\vec{n}d\vec{f}$$
$$0 = I$$

Dies bedeutet, dass der Strom in dem Knoten 0 ergibt und somit folglich die hineinfließenden Ströme genauso groß wie die rausfließenden Ströme sein müssen.

b) Es ist die Kirschhoff'sche Maschenregel für stationäre Ströme zu beweisen.
Aus dem Stichwort "stationär" folgt, dass sich die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ zeitlich nicht ändert, also konstant bleibt, und somit wir ein statisches elektrisches Feld haben, dass Wirbelfrei ist. Also $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$. Für die Spannung U gilt in solch einem Fall

$$U = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r})d\vec{r}$$

Mit Hilfe des stoke'schen Integralsatzes folgt:

$$\begin{aligned} U = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r})d\vec{r} &= \iint \vec{n}\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r})df \\ -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r})d\vec{r} &= \iint \vec{n}0df \\ -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r})d\vec{r} &= 0 \end{aligned}$$

Dies bedeutet nun, dass zwischen beliebigen Punkte auf der Masche die Spannung verschwindet, also es genau so viele negative wie positive Teilspannungen gibt. Dies ist genau das, was die Maschenregel aussagt. □

Aufgabe 2

a) Es ist das $\vec{E}$-Feld in den drei gegebenen Bereichen mit Hilfe des Gauß'schen Gesetzes zu berechnen. Das Gauß'sche Gesetz besagt:

$$\iint \vec{E}d\vec{f} = \frac{1}{\epsilon_0}\iiint \rho(\vec{r})dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Die Ladungsdichte ist uns gegeben mit

$$\rho(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } r < R_1, r > R_2 \\ A\frac{\sin\left(\frac{r-R_1}{R_2-R_1}\pi\right)}{r} & \text{für } R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases}$$

Da $\rho(r)$ nur von r abhängt und somit punktsymmetrisch ist, gilt $\vec{E} = E_r(r)\vec{e}_r$. Damit ergibt sich $\forall r$

$$\begin{aligned} \iint \vec{E} d\vec{f} &= \iint E_r(R)\vec{e}_r r^2 \sin\theta d\phi d\theta \\ &= 4\pi r^2 E_r(r) \end{aligned}$$

Nun brauchen wir nur noch das Volumenintegral in allen drei Bereichen zu berechnen.

I. Es gilt hier $\rho(r) = 0$ für $r < R_1$. Sei $R < R_1$.

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R 0 dV = 0$$

Damit folgt dann

$$4\pi R^2 E_r(R) = 0 \quad \Rightarrow \quad E_r(R) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \vec{0}$$

II. Sei $R_1 \leq R \leq R_2$.

$$\begin{aligned} \frac{Q}{\epsilon_0} &= \frac{1}{\epsilon_0}\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^R A\frac{\sin\left(\frac{r-R_1}{R_2-R_1}\pi\right)}{r} r^2 \sin\theta dr d\phi d\theta \\ &= \frac{A}{\epsilon_0}\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^R \sin\left(\frac{r-R_1}{R_2-R_1}\pi\right) r \sin\theta dr d\phi d\theta \\ &= \frac{4\pi A}{\epsilon_0}\int_{R_1}^R \sin\left(\frac{r-R_1}{R_2-R_1}\pi\right) r dr \end{aligned}$$

Wir machen partielle Integration:

$$\begin{aligned} &= \frac{4\pi A}{\epsilon_0}\left(\left[-r * \frac{R_2-R_1}{\pi}\cos\left(\frac{r-R_1}{R_2-R_1}\pi\right)\right]_{R_1}^R - \int_{R_1}^R -\frac{R_2-R_1}{\pi}\cos\left(\frac{r-R_1}{R_2-R_1}\pi\right) dr\right) \\ &= \frac{4\pi A}{\epsilon_0}\left(\left(-\frac{R(R_2-R_1)}{\pi}\cos\left(\frac{R-R_1}{R_2-R_1}\pi\right) + \frac{R_1(R_2-R_1)}{\pi}\right) + \frac{R_2-R_1}{\pi}\int_{R_1}^R \cos\left(\frac{r-R_1}{R_2-R_1}\pi\right) d\right. \\ &= \frac{4\pi A}{\epsilon_0}\left(\frac{R_2-R_1}{\pi}\left(-R\cos\left(\frac{R-R_1}{R_2-R_1}\pi\right) + R_1\right) + \frac{R_2-R_1}{\pi}\int_{R_1}^R \cos\left(\frac{r-R_1}{R_2-R_1}\pi\right) dr\right) \\ &= \frac{4\pi A}{\epsilon_0}\left(\frac{R_2-R_1}{\pi}\left(R_1 - R\cos\left(\frac{R-R_1}{R_2-R_1}\pi\right)\right) + \frac{R_2-R_1}{\pi}\left[\frac{R_2-R_1}{\pi}\sin\left(\frac{r-R_1}{R_2-R_1}\pi\right)\right]_{R_1}^R\right) \\ &= \frac{4A(R_2-R_1)}{\epsilon_0}\left(R_1 - R\cos\left(\frac{R-R_1}{R_2-R_1}\pi\right) + \left[\frac{R_2-R_1}{\pi}\sin\left(\frac{r-R_1}{R_2-R_1}\pi\right)\right]_{R_1}^R\right) \\ &= \frac{4A(R_2-R_1)}{\epsilon_0}\left(R_1 - R\cos\left(\frac{R-R_1}{R_2-R_1}\pi\right) + \frac{R_2-R_1}{\pi}\left(\sin\left(\frac{R-R_1}{R_2-R_1}\pi\right) - \sin 0\right)\right) \\ &= \frac{4A(R_2-R_1)}{\epsilon_0}\left(R_1 - R\cos\left(\frac{R-R_1}{R_2-R_1}\pi\right) + \frac{R_2-R_1}{\pi}\sin\left(\frac{R-R_1}{R_2-R_1}\pi\right)\right) \end{aligned}$$

Für das $\vec{E}$-Feld gilt nun

$$\begin{aligned}
4\pi R^2 E_r(R) &= \frac{4A(R_2-R_1)}{\epsilon_0}\left(R_1 - R\cos\left(\frac{R-R_1}{R_2-R_1}\pi\right) + \frac{R_2-R_1}{\pi}\sin\left(\frac{R-R_1}{R_2-R_1}\pi\right)\right)\\
E_r(R) &= \frac{A(R_2-R_1)}{R^2\pi\epsilon_0}\left(R_1 - R\cos\left(\frac{R-R_1}{R_2-R_1}\pi\right) + \frac{R_2-R_1}{\pi}\sin\left(\frac{R-R_1}{R_2-R_1}\pi\right)\right)\\
\vec{E}(R) &= \frac{A(R_2-R_1)}{R^2\pi\epsilon_0}\left(R_1 - R\cos\left(\frac{R-R_1}{R_2-R_1}\pi\right) + \frac{R_2-R_1}{\pi}\sin\left(\frac{R-R_1}{R_2-R_1}\pi\right)\right)\vec{e}_r
\end{aligned}$$

III. Hier ist $R > R_2$. Wir müssen bei der Integration statt bis R in Teil II. bis R_2 gehen. Daher ergib sich für das $\vec{E}$-Feld

$$\begin{aligned}
4\pi R^2 E_r(R) &= \frac{4A(R_2-R_1)}{\epsilon_0}\left(R_1 - R_2\cos\pi + \frac{R_2-R_1}{\pi}\sin\pi\right)\\
E_r(R) &= \frac{A(R_2-R_1)}{R^2\pi\epsilon_0}(R_1+R_2)\\
\vec{E}(R) &= \frac{A(R_2-R_1)}{R^2\pi\epsilon_0}(R_1+R_2)\,\vec{e}_r
\end{aligned}$$

b) Es ist dar Betrag des $\vec{E}$-Feldes an unterschiedlichen Abständen zum Mittelpunkt zu berechnen.

1. Sei $r = \frac{R_1}{2}$. r ist kleiner als R_1, daher fällt dieser Punkt in den Bereich I. und somit ist hier $|\vec{E}(r)| = 0$.
2. Sei $r = R_1$. Dies fällt in Bereich II.

$$\begin{aligned}
\vec{E}(r) &= \frac{A(R_2-R_1)}{R_1^2\pi\epsilon_0}\left(R_1 - R_1\cos 0 + \frac{R_2-R_1}{\pi}\sin 0\right)\vec{e}_r\\
&= \frac{A(R_2-R_1)}{R_1^2\pi\epsilon_0}(R_1-R_1)\,\vec{e}_r\\
&= 0\vec{e}_r
\end{aligned}$$

Also gilt auch hier $|\vec{E}(r)| = 0$.

3. Sei $r = R_1 + \frac{R_2-R_1}{2}$. Auch hier landet man im Bereich II.

$$\begin{aligned}
\vec{E}(r) = &\frac{A(R_2-R_1)}{(R_1+\frac{R_2-R_1}{2})^2\pi\epsilon_0}\left(R_1 - \left(R_1+\frac{R_2-R_1}{2}\right)\cos\left(\frac{R_1+\frac{R_2-R_1}{2}-R_1}{R_2-R_1}\pi\right)\right.\\
&\left.+\frac{R_2-R_1}{\pi}\sin\left(\frac{R_1+\frac{R_2-R_1}{2}-R_1}{R_2-R_1}\pi\right)\right)\vec{e}_r\\
= &\frac{A(R_2-R_1)}{(R_1+\frac{R_2-R_1}{2})^2\pi\epsilon_0}\left(-\frac{R_2-R_1}{2}\cos\left(\frac{\frac{R_2-R_1}{2}}{R_2-R_1}\pi\right) + \frac{R_2-R_1}{\pi}\sin\left(\frac{\frac{R_2-R_1}{2}}{R_2-R_1}\pi\right)\right)\vec{e}_r\\
= &\frac{A(R_2-R_1)}{(R_1+\frac{R_2-R_1}{2})^2\pi\epsilon_0}\left(-\frac{R_2-R_1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{R_2-R_1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\vec{e}_r\\
= &\frac{A(R_2-R_1)}{(R_1+\frac{R_2-R_1}{2})^2\pi\epsilon_0}\left(\frac{R_2-R_1}{\pi}\right)\vec{e}_r\\
= &\frac{A(R_2-R_1)^2}{(R_1+\frac{R_2-R_1}{2})^2\pi^2\epsilon_0}\vec{e}_r
\end{aligned}$$

Hier ist also $|\vec{E}(r)| = \frac{A(R_2-R_1)^2}{(R_1+\frac{R_2-R_1}{2})^2\pi^2\epsilon_0}$.

4. Sei $r = 2R_2$. Wir befinden uns in Bereich III.

$$\vec{E}(r) = \frac{A(R_2 - R_1)}{4R_2^2\pi\epsilon_0}(R_1 + R_2)\vec{e}_r$$

Es gilt also $|vecE(r)| = \frac{A(R_2-R_1)}{4R_2^2\pi\epsilon_0}(R_1 + R_2)$.