Theoretische Physik für LAK II: Übung 10

von
Naja v. Schmude (4127652), Gruppe: II

Aufgabe 1

Es sind die Wellengleichungen aus den Maxwell-Gleichungen für leitenden Medien herzuleiten.
Die Maxwell-Gleichungen lauten dabei wie folgt:

$$\vec{\nabla}\vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \tag{1}$$

$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0\epsilon_r\mu_0\mu_r\frac{d\vec{E}}{dt} + \sigma\mu_0\mu_r\vec{E} \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{d\vec{D}}{dt} + \vec{j} \tag{3}$$

Zusätzlich gilt $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, $\vec{D} = \epsilon_0\epsilon_r\vec{E}$ und $\vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{H}$.
Es ist erkennbar, dass in den Maxwell-Gleichungen B und E gekoppelt auftreten. Um nun Wellengleichungen für B und E aufzustellen, müssen wir zunächst die Gleichungen entkoppeln. Dazu wendet man die Rotation auf die Maxwellgleichungen an.

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{d\vec{B}}{dt} \\
\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= -\vec{\nabla} \times \frac{d\vec{B}}{dt} \\
\underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{E})}_{=0} - \triangle\vec{E} &= -\frac{d}{dt}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad | \quad \vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{H} \\
\triangle\vec{E} &= \mu_0\mu_r\frac{d}{dt}(\vec{\nabla} \times \vec{H}) \quad | \quad (3) \\
&= \mu_0\mu_r\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{D}}{dt} + \vec{j}\right) \quad | \quad \vec{D} = \epsilon_0\epsilon_r\vec{D}, \vec{j} = \sigma\vec{E} \\
&= \mu_0\mu_r\left(\epsilon_0\epsilon_r\frac{d^2\vec{E}}{d^2t} + \sigma\frac{d\vec{E}}{dt}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{d\vec{E}}{dt} + \sigma \mu_0 \mu_r \vec{E} \\
\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) &= \vec{\nabla} \times \left(\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{d\vec{E}}{dt} + \sigma \mu_0 \mu_r \vec{E} \right) \\
\underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{B})}_{=0} - \triangle \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{d\vec{E}}{dt} + \vec{\nabla} \times \sigma \mu_0 \mu_r \vec{E} \\
-\triangle \vec{B} &= \epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{d}{dt}(\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \sigma \mu_0 \mu_r (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \quad | \quad (1) \\
-\triangle \vec{B} &= -\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{d^2\vec{B}}{d^2t} - \sigma \mu_0 \mu_r \frac{d\vec{B}}{dt} \\
\triangle \vec{B} &= \epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{d^2\vec{B}}{d^2t} + \sigma \mu_0 \mu_r \frac{d\vec{B}}{dt}
\end{aligned}
$$

Durch diese Umrechnung haben wir jetzt die Gleichungen entkoppelt und gleichzeitig auch schon die Wellengleichungen erhalten.

Aufgabe 2