Theoretische Physik für LAK II: Übung 7

von
Naja v. Schmude (4127652), Gruppe: II

Aufgabe 1

Es ist zu Begründen, wieso das $\vec{E}$-Feld von einer Ladungsverteilung

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_1 & 0 < r \leq R_1 \\ \rho_2 & R_1 < r \leq R \end{cases}$$

nur die radiale Komponente E_r übrig bleibt.
Dies ist der Fall, da vom Kugelmittelpunkt aus alle Richtungen gleich aussehen und man im Bezug auf die Ladungsverteilung, d.h. egal wie man die Kugel dreht, sie sieht aus wie vorher, ist also rotationsinvariant, bzw. kugelsymmetrisch. Da sie kugelsymmetrisch ist, folgt, dass sie natürlich auch spiegelsymmetrisch zu jeder Achse ist, die man in einem beliebigen Winkel zur xy-Ebene legen kann; ergo kann das E-Feld nicht von $\vec{e}_\theta$ abhängen, da diese Symmetrie i. A. nicht erfüllt wäre. Genauso kann man für die nicht existente Abhängigkeit von $\vec{e}_\phi$ argumentieren. Wenn das Feld nämlich davon abhängig wäre, dann könnte ich keine Symmetrieachse in der xy-Ebene finden, denn für die unterschiedlichen ϕ hätte man ja verschiedene Ladungsverteilungen. Damit dann die Kugelsymmetrie erfüllt ist, muss man natürlich die Komponenten in $\vec{e}_\theta$ und $\vec{e}_\phi$ Richtung gleich null setzten.

Aufgabe 2

Ziel ist die Berechnung der Kraft von den zwei gegebenen Leitern aufeinander über das 1. Ampere-Gesetz.

1. Zunächst eine Skizze ...

2. Jetzt ist zunächst das Skalarprodukt von $d\vec{r}_1 d\vec{r}_2$ zu berechnen.

   (a) Zunächst müssen wir die Vektoren $\vec{r}_1 = (-a, 0, z)$ und $\vec{r}_2 = (\cos\phi, \sin\phi, 0)$ parametrisieren. Es folgt $\vec{r}_1 = (-a, 0, z)$ mit $z \in]-\infty, \infty[$ und $\vec{r}_2 = (\cos\phi, \sin\phi, 0)$ mit $\phi \in [0, 2\pi]$. Jetzt folgt

$$\begin{aligned} d\vec{r}_1 &= \frac{\partial(-a,0,z)}{\partial z} dz \\ &= (0,0,1)dz \\ d\vec{r}_2 &= \frac{\partial(\cos\phi, \sin\phi, 0)}{\partial\phi} d\phi \\ &= (-\sin\phi, \cos\phi, 0)d\phi \\ d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 &= 0 * (-\sin\phi) + 0 * \cos\phi + 1 * 0 dz d\phi \\ &= 0 \end{aligned}$$

   (b) Jetzt das selbe für das zweite Leiter-Paar ... Wir parametrisieren wieder: $\vec{r}_1 = (-a, y, 0)$ mit $y \in] - \infty, \infty[$ und $\vec{r}_2 = (\cos\phi, \sin\phi, 0)$ mit $\phi \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned} d\vec{r}_1 &= \frac{\partial(-a,y,0)}{\partial y} dy \\ &= (0,1,0)dy \\ d\vec{r}_2 &= \frac{\partial(\cos\phi, \sin\phi, 0)}{\partial\phi} d\phi \\ &= (-\sin\phi, \cos\phi, 0)d\phi \\ d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 &= 0 * (-\sin\phi) + 1 * \cos\phi + 0 * 0 dy d\phi \\ &= \cos\phi dy d\phi \end{aligned}$$

3. Nun zum nächste Baustein: $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3$.

   (a) Für das erste Leiterpaar:

$$\begin{aligned} |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3 &= \left((-a-\cos\phi)^2 + (-\sin\phi)^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \left(a^2 + 2a\cos\phi + \underbrace{\cos^2\phi + \sin^2\phi}_{=1} + z^2\right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \left(a^2 + 2a\cos\phi + z^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

   (b) Für das zweite Leiterpaar:

$$\begin{aligned} |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3 &= \left((-a-\cos\phi)^2 + (y-\sin\phi)^2\right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \left(a^2 + 2a\cos\phi + \cos^2\phi + y^2 - 2y\sin\phi + \sin^2\phi\right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \left(a^2 + 2a\cos\phi + y^2 - 2y\sin\phi + 1\right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

4. Jetzt können wir das Integral zur Berechnung der Kräfte aufstellen. Die allgemeine Formel lautet

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \iint d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

(a)

$$\begin{aligned}\vec{F}_{12} &= -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} 0 \frac{(-a - \cos\phi, -\sin\phi, z)}{(a^2 + 2a\cos\phi + z^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \\ &= 0\end{aligned}$$

Da das Skalarprodukt in diesem Fall 0 ist, ist die Kraft von Leiter 2 auf 1 auch null.

(b)

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \cos\phi dy d\phi \frac{(-a - \cos\phi, y - \sin\phi, 0)}{(a^2 + 2a\cos\phi + y^2 - 2y\sin\phi + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

Wie man hier sieht, existiert hier eine Kraft. Da die Kraft mit dem Abstand abnimmt, hat am meisten Einfluss das Leiterstück von $\vec{r}_2$, welches am nächsten zur $\vec{r}_1$ ist. Hier kann man mit der rechten Hand Regel einfach bestimen, dass sich die Leiterstücken abstoßen.