Theoretische Physik für LAK II: Übung 4

von
Naja v. Schmude (4127652), Gruppe: II

Aufgabe 1

Aufgabe 2

a) Es ist das elektrische Feld des Kugelkondensators anzugeben. Dazu müssen wir erstmal überlegen, wie denn von den beiden Kugeln an den unterschiedlichen Stellen das Feld aussieht. Für die innere Kugel gilt

$$\vec{E}_I = \begin{cases} \frac{-Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}\vec{e}_r & \text{für } r < R \\ \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}\vec{e}_r & \text{für } r > R \end{cases}$$

und für die äußere entsprechend

$$\vec{E}_A = \begin{cases} \frac{3Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}\vec{e}_r & \text{für } r < 2R \\ \frac{-3Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}\vec{e}_r & \text{für } r > 2R \end{cases}$$

Das gesamte Feld ergibt sich dann als Überlagerung von $\vec{E}_I$ und $\vec{E}_A$.

1. Für $r < R$:

$$\vec{E} = \vec{E}_I + \vec{E}_A = \frac{-Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}\vec{e}_r + \frac{3Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}\vec{e}_r = \frac{Q}{2\pi r^2 \epsilon_0}\vec{e}_r$$

2. Für $R < r < 2R$:

$$\vec{E} = \vec{E}_I + \vec{E}_A = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}\vec{e}_r + \frac{3Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}\vec{e}_r = \frac{Q}{\pi r^2 \epsilon_0}\vec{e}_r$$

3. Für $r > 2R$:

$$\vec{E} = \vec{E}_I + \vec{E}_A = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}\vec{e}_r - \frac{3Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}\vec{e}_r = \frac{-Q}{2\pi r^2 \epsilon_0}\vec{e}_r$$

b) Die Energie lässt sich berechnen über

$$E_g = \frac{\epsilon_0}{2}\int d^3r |\vec{E}(\vec{r}|^2$$

Da wir für die in a) gegebenen unterschiedliche Radien r verschiedene Felder erhalten, müssen wir also auch die Energie dreimal berechnen.

1. Für $r < R$.

$$
\begin{aligned}
E_g &= \frac{\epsilon_0}{2}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^R r^2 \sin\theta \left(\frac{Q}{2\pi r^2 \epsilon_0} r\right)^2 dr \\
&= \frac{\epsilon_0}{2}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^R r^2 \sin\theta \frac{Q^2}{4\pi^2 r^2 \epsilon_0^2} dr \\
&= \frac{Q^2}{8\pi^2\epsilon_0}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^R \sin\theta dr \\
&= \frac{Q^2}{8\pi^2\epsilon_0}\left(\int_0^{2\pi} d\phi + \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta + \int_0^R dr\right) \\
&= \frac{Q^2}{8\pi^2\epsilon_0}\left([\phi]_0^{2\pi} + [-\cos\theta]_0^{\pi} + [r]_0^R\right) \\
&= \frac{Q^2}{8\pi^2\epsilon_0}(2\pi + R)
\end{aligned}
$$

2. Für $R < r < 2R$.

$$
\begin{aligned}
E_g &= \frac{\epsilon_0}{2}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^R r^2 \sin\theta \left(\frac{Q}{\pi r^2 \epsilon_0} r\right)^2 dr \\
&= \frac{\epsilon_0}{2}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^R r^2 \sin\theta \frac{Q^2}{\pi^2 r^2 \epsilon_0^2} dr \\
&= \frac{Q^2}{2\pi^2\epsilon_0}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^R \sin\theta dr \\
&= \frac{Q^2}{2\pi^2\epsilon_0}\left(\int_0^{2\pi} d\phi + \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta + \int_0^R dr\right) \\
&= \frac{Q^2}{2\pi^2\epsilon_0}\left([\phi]_0^{2\pi} + [-\cos\theta]_0^{\pi} + [r]_0^R\right) \\
&= \frac{Q^2}{2\pi^2\epsilon_0}(2\pi + R)
\end{aligned}
$$

3. Für $r > 2R$. Da der Betrag des Feldes genommen wird und dieser identisch mit dem für $r < R$ ist, ist auch hier das Ergebnis

$$
E_g = \frac{Q^2}{8\pi^2\epsilon_0}(2\pi + R)
$$