Theoretische Physik für LAK II: Übung 3

von
Naja v. Schmude (4127652), Gruppe: II

Aufgabe 1

Es ist die Kraft zu berechnen, die der Stab auf die Punktladung ausübt.
Da der Stab homogen geladen ist, kann man ganz leicht die Dichte bestimmen: $\rho = \frac{5Q}{a}$.
Für den Fall $a = 1cm$ lautet die Kraft, die auf die Ladung wirkt:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_C((0,0,a) &= \frac{1C}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{5C}{a} \frac{(0,0,a) - x}{|(0,0,a) - x|^3} dx \\
&= \frac{1C}{4\pi\epsilon_0} \frac{5C}{a} \int_0^a \frac{(-x,0,a)}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dx \\
&= \frac{1C}{4\pi\epsilon_0} \frac{5C}{a} \left(\int_0^a \frac{-x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dx \vec{e}_x + \int_0^a \frac{a}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dx \vec{e}_z \right) \\
&= \frac{1C}{4\pi\epsilon_0} \frac{5C}{a} \left(\int_0^a \frac{-x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dx \vec{e}_x + \left[\frac{ax}{a^2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right]_0^a \vec{e}_z \right) \\
&= \frac{1C}{4\pi\epsilon_0} \frac{5C}{a} \left(\int_0^a \frac{-x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dx \vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}a} \vec{e}_z \right)
\end{aligned}$$

Leider find eich das andere Integral dann doch nicht so einfach ...

Aufgabe 2

Es ist jeweils die zu verrichtende Arbeit zu Berechnen, um die Ladung von einem Punkt zum anderen zu bewegen, wobei sie im Feld $\vec{E}_{r,\phi,\theta} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$. Da wir es später noch brauchen, stellen wir das Feld schnell mal in kartesischen Koordinaten dar: $\vec{E}_{xyz} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} (x, y, z)$.
Um die Arbeiten zu berechnen, muss man jeweils das Linienintegral über die Kraft berechnen, die Kraft ist $\vec{F}_C = q\vec{E}$. Für die Arbeit von $\vec{r}_1$ zu $\vec{r}_2$ gilt allgemein:

$$W_{21} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_C d\vec{r}$$

a) Die Ladung q soll von Ort $(a, 0, 0)$ nach $(0, 0, a)$ auf einem Viertelkreis befördert werden.

   1. Weg parametrisieren: $(\cos\alpha * a, 0, \sin\alpha * a)$ mit $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
   2. Wir berechnen $d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{d\alpha} d\alpha$.

$$\begin{aligned}
d\vec{r} &= \frac{d\vec{r}}{d\alpha} d\alpha \\
&= \frac{d(\cos\alpha * a, 0, \sin\alpha * a)}{d\alpha} d\alpha \\
&= (-\sin\alpha * a, 0, \cos\alpha * a) d\alpha
\end{aligned}$$

3. Nun folgt das Skalarprodukt $\vec{F}_C * d\vec{r}$.

$$\begin{aligned}\vec{F}_C * d\vec{r} &= \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z) * (-\sin\alpha * a, 0, \cos\alpha * a)d\alpha \\ &= \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}\frac{-ax\sin\alpha + az\cos\alpha}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}d\alpha\end{aligned}$$

4. Nun wird die Parametrisierung hier noch eingesetzt ...

$$\begin{aligned}\vec{F}_C * d\vec{r} &= \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}\frac{-a\cos\alpha\sin\alpha + a\sin\alpha\cos\alpha}{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^{3/2}}d\alpha \\ &= 0d\alpha\end{aligned}$$

Die Arbeit wäre also

$$W_{21} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0d\alpha = 0$$

b) Diesmal soll die Ladung von $(a,0,0)$ nach $(2a,0,0)$ befördert werden. Wir gehen wie oben vor.

1. Weg parametrisieren: $(\alpha * a, 0, 0)$ mit $\alpha \in [1,2]$.
2. Wir berechnen $d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{d\alpha}d\alpha$.

$$\begin{aligned}d\vec{r} &= \frac{d\vec{r}}{d\alpha}d\alpha \\ &= \frac{d(\alpha * a, 0, 0)}{d\alpha}d\alpha \\ &= (a,0,0)d\alpha\end{aligned}$$

3. Nun folgt das Skalarprodukt $\vec{F}_C * d\vec{r}$.

$$\begin{aligned}\vec{F}_C * d\vec{r} &= \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z) * (a,0,0)d\alpha \\ &= \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}\frac{ax}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}d\alpha\end{aligned}$$

4. Nun wird die Parametrisierung hier noch eingesetzt ...

$$\begin{aligned}\vec{F}_C * d\vec{r} &= \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}\frac{a^2\alpha}{(a^2\alpha^2)^{3/2}}d\alpha \\ &= \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}\frac{a^2\alpha}{(a\alpha)^3}d\alpha \\ &= \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a\alpha^2}d\alpha\end{aligned}$$

Die Arbeit ergibt sich also als

$$
\begin{aligned}
W_{21} &= -\int_1^2 \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a\alpha^2} d\alpha \\
&= \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 a} \left[-\frac{1}{\alpha} \right]_1^2 \\
&= \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 a} \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) \\
&= \frac{Qq}{8\pi\epsilon_0 a}
\end{aligned}
$$

c) Und auf ein weiteres. Diesmal geht's von $(a, 0, 0)$ nach $(0, 0, 2a)$.

1. Weg parametrisieren: $(\alpha * a, 0, (-2\alpha + 2)a)$ mit $\alpha \in [0, 1]$.
2. Wir berechnen $d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{d\alpha} d\alpha$.

$$
\begin{aligned}
d\vec{r} &= \frac{d\vec{r}}{d\alpha} d\alpha \\
&= \frac{d(\alpha * a, 0, (-2\alpha + 2)a)}{d\alpha} d\alpha \\
&= (a, 0, -2a) d\alpha
\end{aligned}
$$

3. Nun folgt das Skalarprodukt $\vec{F}_C * d\vec{r}$.

$$
\begin{aligned}
\vec{F}_C * d\vec{r} &= \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z) * (a, 0, -2a) d\alpha \\
&= \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{ax - 2az}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} d\alpha
\end{aligned}
$$

4. Nun wird die Parametrisierung hier noch eingesetzt ...

$$
\begin{aligned}
\vec{F}_C * d\vec{r} &= \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{a^2\alpha - 2a^2(-2\alpha + 2)}{(a^2\alpha^2 + a^2(-2\alpha + 2)^2)^{3/2}} d\alpha \\
&= \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{5a^2\alpha - 4a^2}{(a^2\alpha^2 + a^2(-2\alpha + 2)^2)^{3/2}} d\alpha
\end{aligned}
$$

Die Arbeit ergibt sich also als

$$
W_{21} = -\int_1^2 \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{5a^2\alpha - 4a^2}{(a^2\alpha^2 + a^2(-2\alpha + 2)^2)^{3/2}} d\alpha
$$