Theoretische Physik für LAK II: Übung 8

von
Naja v. Schmude (4127652), Gruppe: II

Aufgabe 1

Es ist mit dem Biot-Savart-Gesetz das $\vec{B}$-Feld um einen dünnen Draht, durch den in z-Richtung ein Strom I_0 fließt, zu berechnen. Die allgemeine Formel lautet

$$\vec{B}_2(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \int_{C_2} \frac{d\vec{r}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

Unser Leiter hat in diesem konkreten Fall dann den Index 2, der Punkt, auf den das Feld wirkt, trägt den Index 1. Wir stellen zunächst die Ortsvektoren auf (in Zylinderkoordinaten) und berechnen die einzelnen benötigten Komponenten:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_1 &= (\rho, 0, z) \\
\vec{r}_2 &= (0, 0, z) \\
d\vec{r}_2 &= \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial z} \partial z = (0,0,1) dz \\
\vec{r}_1 - \vec{r}_2 &= (\rho, 0, z) - (0, 0, z) = (\rho, 0, 0) \\
|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3 &= \left(\rho^2\right)^{\frac{3}{2}} = \rho^3 \\
d\vec{r}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) &= \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & 0 & \rho \\ \vec{e}_\phi & 0 & 0 \\ \vec{e}_z & dz & 0 \end{vmatrix} = \rho dz \vec{e}_\phi
\end{aligned}$$

Nun kann man einfach in die oben genannte Formel einsetzten:

$$\begin{aligned}
\vec{B}_2(\vec{r}_1) &= \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \int_{C_2} \frac{d\vec{r}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \\
&= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho \vec{e}_\phi}{\rho^3} dz \\
&= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi \rho^2} [z]_{-\infty}^{\infty} \vec{e}_\phi \\
&= \frac{\mu_0 I_0}{4\pi \rho^2} (2\infty) \vec{e}_\phi \\
&= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi \rho^2} (\infty) \vec{e}_\phi
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Es sind die Maxwell-Gleichungen differentieller Form für

$$\vec{E}(x, y, z, t) = A_0 \sin(kz - \omega t) \vec{e}_x \quad \vec{B}(x, y, z, t) = B_0 \sin(kz - \omega t) \vec{e}_y$$

zu überprüfen, wenn $\vec{j} = 0$ und $\rho = 0$ gilt.

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\vec{E} &= \frac{\rho(\vec{r},t)}{\epsilon_0} \\
\text{linke Seite } \vec{\nabla}\vec{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial(A_0\sin(kz-\omega t))}{\partial x} + \frac{\partial 0}{\partial y} + \frac{\partial 0}{\partial z} = 0 \\
\text{rechte Seite } \frac{\rho(\vec{r},t)}{\epsilon_0} &= \frac{0}{\epsilon_0} = 0
\end{aligned}$$

Es gilt also $0 = 0$, was korrekt ist.

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\vec{B} &= 0 \\
\text{linke Seite } \vec{\nabla}\vec{B} &= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial 0}{\partial x} + \frac{\partial(B_0\sin(kz-\omega t))}{\partial y} + \frac{\partial 0}{\partial z} = 0
\end{aligned}$$

Es gilt also auch hier $0 = 0$, was eine wahre Aussage ist.

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times\vec{E} &= -\frac{d\vec{B}}{dt} \\
\text{linke Seite } \vec{\nabla}\times\vec{E} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \frac{\partial}{\partial x} & A_0\sin(kz-\omega t) \\ \vec{e}_y & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \vec{e}_z & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial(A_0\sin(kz-\omega t))}{\partial z} \\ \frac{\partial(A_0\sin(kz-\omega t))}{\partial y} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ A_0 k\cos(kz-\omega t)) \\ 0 \end{pmatrix} \\
\text{rechte Seite } -\frac{d\vec{B}}{dt} &= -\frac{d(B_0\sin(kz-\omega t))}{dt}\vec{e}_y = B_0\omega\cos(kz-\omega t)\vec{e}_y \\
\text{Gleichsetzen } A_0 k\cos(kz-\omega t)\vec{e}_y &= B_0\omega\cos(kz-\omega t)\vec{e}_y \\
A_0 k &= \omega B_0 \quad |\omega = ck \\
A_0 k &= ckB_0 \\
B_0 &= \frac{A_0}{c}
\end{aligned}$$

Wenn also $B_0 = \frac{A_0}{c}$ gilt, dann ist auch diese Beziehung erfüllt.

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \epsilon_0\mu_0 \frac{d\vec{E}}{dt} + \mu_0\vec{j} \\
\text{linke Seite } \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \vec{e}_y & \frac{\partial}{\partial y} & B_0\sin(kz-\omega t) \\ \vec{e}_z & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial(B_0\sin(kz-\omega t))}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{\partial(B_0\sin(kz-\omega t))}{\partial x} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -kB_0\cos(kz-\omega t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\text{rechte Seite } \epsilon_0\mu_0 \frac{d\vec{E}}{dt} + \mu_0\vec{j} &= \epsilon_0\mu_0 \frac{d(A_0\sin(kz-\omega t))}{dt}\vec{e}_x = -\epsilon_0\mu_0 A_0\omega\cos(kz-\omega t)\vec{e}_x \\
\text{Gleichsetzen } -kB_0\cos(kz-\omega t)\vec{e}_x &= -\epsilon_0\mu_0 A_0\omega\cos(kz-\omega t)\vec{e}_x \\
kB_0 &= \epsilon_0\mu_0\omega A_0 \quad |\epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2} \\
kB_0 &= \frac{1}{c^2}\omega A_0 \quad |c = \frac{\omega}{k} \\
kB_0 &= \frac{k^2}{\omega^2}\omega A_0 \\
B_0 &= \frac{k}{\omega}A_0 \quad |c = \frac{\omega}{k} \\
B_0 &= \frac{A_0}{c}
\end{aligned}
$$

Wenn also $B_0 = \frac{A_0}{c}$ gilt, dann ist auch diese Beziehung erfüllt. Da dies die selbe Beziehung ist wie die, die für 5.7 gelten muss, so ist also für alle Maxwell-Gleichungen gezeigt, dass die in diesem speziellen Fall gelten. Es gilt die folgende Beziehung für B_0

$$B_= \frac{A_0}{c}$$