Theoretische Physik für LAK 1: Übung 8

von
Naja v. Schmude (4127652), Gruppe: Montag

Aufgabe 1

a) Bei einer festen Seillänge von l hat das Problem einen Freiheitsgrad, nämlich den Abstand s von m_2 zur Tischplatte.
Als Koordinaten wählen wir die xz-Ebene mit $z = 0, x = 0$ an der rechten oberen Ecke der Tischplatte (dort wo das Seil rüberhängt). Daraus ergeben sich folgende Ortsvektoren der Massen:

$$\vec{r}_1 = (l + z, 0) \qquad \vec{r}_2 = (0, z)$$

Die Lagrange-Funktion lautet $L = T - V$, wir müssen nun also die kinetische und potenzielle Energie bestimmen.

$$\begin{aligned}
T &= T_1 + T_2 \\
&= \frac{m_1}{2}\vec{v}_1^2 + \frac{m_2}{2}\vec{v}_2^2 \\
&= \frac{m_1}{2}(\dot{x_1}, \dot{z_1})^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{x_2}, \dot{z_2})^2 \\
&= \frac{m_1}{2}(\dot{z}, 0)^2 + \frac{m_2}{2}(0, \dot{z})^2 \\
&= \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{z}^2 \\
V &= V_1 + V_2 \\
&= m_1 g z_1 + m_2 g z_2 \\
&= m_2 g z
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich als Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{z}^2 - m_2 g z$$

Nun wird die Bewegungsgleichung aufgestellt nach

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial z} &= -m_2 g \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} &= (m_1 + m_2)\dot{z} \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} &= (m_1 + m_2)\ddot{z}
\end{aligned}$$

Es ergibt sich also die folgende Bewegungsgleichung.

$$(m_1 + m_2)\ddot{z} + m_2 g = 0$$

b) Dieses Problem hat zwei Freiheitsgrade. Einmal kann die Position der ersten Masse festgelegt werden und dann kann die zweite Masse beliebig davon ausgelenkt werden. Durch den festen Neigungswinkel α der Schiene ergibt sich die Zwangsbedingung $x = \frac{z}{\tan\alpha}$. Die zu betrachtenden Koordinaten sind also z_1 und z_2. Damit folgt für die Ortsvektoren der Massen mit der ersten Zwangsbedingung:

$$\vec{r}_1 = (\frac{z_1}{\tan\alpha}, z_1) \qquad \vec{r}_2 = (\frac{z_2}{\tan\alpha}, z_2)$$

Man muss nun wieder die potentielle Energie und die kinetische bestimmen.

$$\begin{aligned}
T &= T_1 + T_2 \\
&= \frac{m}{2}\vec{v}_1^2 + \frac{m}{2}\vec{v}_2^2 \\
&= \frac{m}{2}(\dot{x}_1, \dot{z}_1)^2 + \frac{m}{2}(\dot{x}_2, \dot{z}_2)^2 \\
&= \frac{m}{2}(\frac{\dot{z}_1}{\tan\alpha}, \dot{z}_1)^2 + \frac{m}{2}(\frac{\dot{z}_2}{\tan\alpha}, \dot{z}_2)^2 \\
&= \frac{m}{2}\left(\frac{\dot{z}_1^2}{\tan^2\alpha} + \dot{z}_1^2 + \frac{\dot{z}_2^2}{\tan^2\alpha} + \dot{z}_2^2\right) \\
V &= V_1 + V_2 \\
&= mgz_1 + \frac{k}{2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \vec{l}_0)^2 + mgz_2 \\
&= mg(z_1 + z_2) + \frac{k}{2}\left(\frac{z_1 - z_2}{\tan\alpha} - l_0\cos\alpha, z_1 - z_2 - l_0\sin\alpha\right)^2 \\
&= mg(z_1 + z_2) + \frac{k}{2}\left((\frac{z_1 - z_2}{\tan\alpha} - l_0\cos\alpha)^2 + (z_1 - z_2 - l_0\sin\alpha)^2\right) \\
&= mg(z_1 + z_2) + \frac{k}{2}\left(\frac{(z_1 - z_2)^2}{\tan^2\alpha} - \frac{2l_0(z_1 - z_2)\cos\alpha}{\tan\alpha} + l_0^2\cos^2\alpha\right. \\
&\left. + (z_1 - z_2)^2 - 2l_0(z_1 - z_2)\sin\alpha + l_0^2\sin^2\alpha\right) \\
&= mg(z_1 + z_2) + \frac{k}{2}\left(\frac{(z_1 - z_2)^2}{\tan^2\alpha} - \frac{2l_0(z_1 - z_2)\cos\alpha}{\tan\alpha} + (z_1 - z_2)^2 - 2l_0(z_1 - z_2)\sin\alpha + 1\right) \\
&= mg(z_1 + z_2) + \frac{k(z_1 - z_2)}{2}\left(-\frac{2l_0\cos\alpha}{\tan\alpha} + 2l_0\sin\alpha\right) + \frac{k(z_1 - z_2)^2}{2}\left(\frac{1}{\tan^2\alpha} + 1\right) + \frac{k}{2}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
L &= T - V \\
&= \frac{m\dot{z}_1^2}{2}\left(\frac{1}{\tan^2\alpha} + 1\right) + \frac{m\dot{z}_2^2}{2}\left(\frac{1}{\tan^2\alpha} + 1\right) - mg(z_1 + z_2) \\
&- \frac{k(z_1 - z_2)}{2}\left(-\frac{2l_0\cos\alpha}{\tan\alpha} + 2l_0\sin\alpha\right) - \frac{k(z_1 - z_2)^2}{2}\left(\frac{1}{\tan^2\alpha} + 1\right) - \frac{k}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial z_1} &= -mg - \frac{k}{2}\left(-\frac{2l_0\cos\alpha}{\tan\alpha} + 2l_0\sin\alpha\right) - kz_1\left(\frac{1}{\tan^2\alpha} + 1\right) + kz_2\left(\frac{1}{\tan^2\alpha} + 1\right) \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_1} &= m\dot{z}_1\left(\frac{1}{\tan^2\alpha} + 1\right) \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_1} &= m\ddot{z}_1\left(\frac{1}{\tan^2\alpha} + 1\right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z_2} = -mg + \frac{k}{2}\left(-\frac{2l_0\cos\alpha}{\tan\alpha} + 2l_0\sin\alpha\right) - kz_2\left(\frac{1}{\tan^2\alpha}+1\right) + kz_1\left(\frac{1}{\tan^2\alpha}+1\right)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_2} = m\dot{z}_2\left(\frac{1}{\tan^2\alpha}+1\right)$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_2} = m\ddot{z}_2\left(\frac{1}{\tan^2\alpha}+1\right)$$

Daraus ergeben sich nun die folgenden zwei Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_1} - \frac{\partial L}{\partial z_1} = 0$$
$$m\ddot{z}_1\left(\frac{1}{\tan^2\alpha}+1\right) +$$
$$mg + \frac{k}{2}\left(-\frac{2l_0\cos\alpha}{\tan\alpha} + 2l_0\sin\alpha\right) + kz_1\left(\frac{1}{\tan^2\alpha}+1\right) - kz_2\left(\frac{1}{\tan^2\alpha}+1\right) = 0$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_2} - \frac{\partial L}{\partial z_2} = 0$$
$$m\ddot{z}_2\left(\frac{1}{\tan^2\alpha}+1\right) +$$
$$mg - \frac{k}{2}\left(-\frac{2l_0\cos\alpha}{\tan\alpha} + 2l_0\sin\alpha\right) + kz_2\left(\frac{1}{\tan^2\alpha}+1\right) - kz_1\left(\frac{1}{\tan^2\alpha}+1\right) = 0$$

Aufgabe 2

Ein mathematisches Pendel soll in der xz-Ebene schwingen, wobei der Aufhängepunkt periodisch entlang der z-Achse verschoben wird.
Dieses Problem hat einen Freiheitgrad, da die Bewegung in z-Richtung vorgegeben ist. Es kann also nur der Auslenkungswinkel ϕ bestimmt werden. Für den Ortsvektor der Masse gilt

$$\vec{r} = (x, z) = (l\sin\phi, z_A - l\cos\phi)$$

Mit $z_A = A\sin(\Omega t)$, $\dot{z}_A = \Omega A\cos(\Omega t)$ und $\ddot{z}_A = -\Omega^2 A\sin(\Omega t)$.
Jetzt muss wieder die Bewegungsgleichung mit dem Lagrange-Formalismum aufgestellt werden. Dazu wird wie immer zunächst die potentielle Energie und die kinetische Energie aufgestellt.

$$\begin{aligned}
T &= \frac{m}{2}\vec{v}^2 \\
&= \frac{m}{2}(\dot{x}, \dot{z})^2 \\
&= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) \\
&= \frac{m}{2}(l^2\dot{\phi}^2\cos^2\phi + (\dot{z}_A + l\dot{\phi}\sin\phi)^2) \\
&= \frac{m}{2}(l^2\dot{\phi}^2\cos^2\phi + \dot{z}_A^2 + 2\dot{z}_A l\dot{\phi}\sin\phi + l^2\dot{\phi}^2\sin^2\phi) \\
&= \frac{m}{2}(l^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}_A^2 + 2\dot{z}_A l\dot{\phi}\sin\phi) \\
V &= mgz \\
&= mg(z_A - l\cos\phi)
\end{aligned}$$

Es ergibt sich dann als Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned}
L &= T - V \\
&= \frac{m}{2}(l^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}_A^2 + 2\dot{z}_A l\dot{\phi}\sin\phi) - mg(z_A - l\cos\phi)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = m\dot{z}_A l\dot{\phi}\cos\phi - mgl\sin\phi$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ml^2\dot{\phi} + m\dot{z}_A l\sin\phi$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ml^2\ddot{\phi} + m\ddot{z}_A l\sin\phi + m\dot{z}_A\dot{\phi}l\cos\phi$$

Nun folgt die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$
$$ml^2\ddot{\phi} + m\ddot{z}_A l\sin\phi + m\dot{z}_A\dot{\phi}l\cos\phi - m\dot{z}_A l\dot{\phi}\cos\phi + mgl\sin\phi = 0$$
$$ml^2\ddot{\phi} + m\ddot{z}_A l\sin\phi + mgl\sin\phi = 0$$
$$ml^2\ddot{\phi} - m\Omega^2 A\sin(\Omega t)\sin\phi + mgl\sin\phi = 0$$

Für kleine Winkel gilt die Näherung $\sin\phi \approx \phi$, damit gilt dann

$$ml^2\ddot{\phi} - m\Omega^2 A\sin(\Omega t)\phi + mgl\phi = 0$$