Theoretische Physik für LAK 1: Übung 4

von
Naja v. Schmude (4127652), Gruppe: Montag

Aufgabe 1

Zunächst werden zu den Skalarfeldern die Äquipotenziallinien (und schon mit angedeutetem $\vec{\nabla}\Phi$). Nun berechnet man richtig den Gradienten mittels $\vec{\nabla}\Phi$.

a) Es sei $\Phi(x, y, z) = \Phi_0 * (2x + y)$.

$$\vec{\nabla}\Phi = \left(\frac{\partial\Phi_0(2x+y)}{\partial x}, \frac{\partial\Phi_0(2x+y)}{\partial y}, \frac{\partial\Phi_0(2x+y)}{\partial z}\right)$$
$$= \Phi_0(2, 1, 0)$$

b) Gegeben ist $\Phi(x, y, z) = \Phi_0 xy$.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\Phi &= \left(\frac{\partial(\Phi_0 xy)}{\partial x}, \frac{\partial(\Phi_0 xy)}{\partial y}, \frac{\partial(\Phi_0 xy)}{\partial z}\right)\\ &= \Phi_0(y, x, 0)\end{aligned}$$

c) Hier ist $\Phi(x, y, z) = \Phi_0 \frac{y}{x^2} = \Phi_0 y x^{-2}$.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\Phi &= \left(\frac{\partial(\Phi_0 y x^{-2})}{\partial x}, \frac{\partial(\Phi_0 y x^{-2})}{\partial y}, \frac{\partial(\Phi_0 y x^{-2})}{\partial z}\right)\\ &= \Phi_0(-2yx^{-3}, x^{-2}, 0)\end{aligned}$$

d) Es ist $\Phi(x, y, z) = \Phi_0(x^2 + y^2)$ gegeben.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\Phi &= \left(\frac{\partial\Phi_0(x^2+y^2)}{\partial x}, \frac{\partial\Phi_0(x^2+y^2)}{\partial y}, \frac{\partial\Phi_0(x^2+y^2)}{\partial z}\right)\\ &= \Phi_0(2x, 2y, 0)\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Die Divergenz der Vektorfelder und die Rotation ist nun zu berechnen.

a) Das Vektorfeld lautet $\vec{A}(x, y, z) = A_0(x, y, z)$.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\vec{A} &= \frac{\partial A_0 x}{\partial x} + \frac{\partial A_0 y}{\partial y} + \frac{\partial A_0 z}{\partial z}\\ &= A_0 + A_0 + A_0 = 3A_0\\ \vec{\nabla}\times\vec{A} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_0 x & A_0 y & A_0 z \end{vmatrix}\\ &= \vec{e}_x\left(\frac{\partial A_0 z}{\partial y} - \frac{\partial A_0 y}{\partial z}\right) + \vec{e}_y\left(\frac{\partial A_0 x}{\partial z} - \frac{\partial A_0 z}{\partial x}\right) + \vec{e}_z\left(\frac{\partial A_0 y}{\partial x} - \frac{\partial A_0 x}{\partial y}\right)\\ &= (0, 0, 0)\end{aligned}$$

b) Hier ist das Vektorfeld definiert durch $\vec{A}(x, y, z) = A_0(2x, y, 0)$.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\vec{A} &= \frac{\partial A_0 * 2x}{\partial x} + \frac{\partial A_0 y}{\partial y} + \frac{\partial A_0 * 0}{\partial z}\\ &= 2A_0 + A_0 = 3A_0\\ \vec{\nabla}\times\vec{A} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_0 * 2x & A_0 y & 0 \end{vmatrix}\\ &= \vec{e}_x\left(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial A_0 y}{\partial z}\right) + \vec{e}_y\left(\frac{\partial A_0 * 2x}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial x}\right) + \vec{e}_z\left(\frac{\partial A_0 y}{\partial x} - \frac{\partial A_0 * 2x}{\partial y}\right)\\ &= (0, 0, 0)\end{aligned}$$

c) Und hier durch $\vec{A}(x,y,z) = A_0(x,x,0)$.

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\vec{A} &= \frac{\partial A_0 x}{\partial x} + \frac{\partial A_0 x}{\partial y} + \frac{\partial A_0 * 0}{\partial z} \\
&= A_0 \\
\vec{\nabla} \times \vec{A} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_0 x & A_0 x & 0 \end{vmatrix} \\
&= \vec{e}_x \left(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial A_0 x}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial A_0 x}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial A_0 x}{\partial x} - \frac{\partial A_0 x}{\partial y} \right) \\
&= (0, 0, A_0)
\end{aligned}$$

Die entsprechenden Vektorfelder sehen wie folgt aus: