Theoretische Physik für LAK 1: Übung 12

von
Naja v. Schmude (4127652), Gruppe: Montag

Aufgabe 1

a) Es soll der Schwerpunkt eines 3-atomigen Moleküls berechnet werden. Als Bezugspunkt des Dreieckförmigen Moleküls wählt man der Einfachheit halber den Schnittpunkt von h und Basis a also $\vec{r} = (x, y, z)$. Damit ergibt sich als Ortsvektoren der drei Atome $\vec{r}_1 = (x - \frac{a}{2}, y, z)$, $\vec{r}_2 = (x + \frac{a}{2}, y, z)$ und $\vec{r}_3 = (x, y + \frac{a}{2}, z)$.

$$\begin{aligned}
\vec{R}_S &= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} m_i \vec{r}_i \\
&= \frac{1}{3m}\Big(m(x - \frac{a}{2}, y, z) + m(x + \frac{a}{2}, y, z) + m(x, y + \frac{a}{2}, z)\Big) \\
&= \frac{1}{3m}\Big(3mx, 3my + m\frac{a}{2}, 3mz\Big) \\
&= \Big(x, y + \frac{a}{6}, z\Big)
\end{aligned}$$

b) Man wählt als Koordinate z. Nun stellen wir die Lagrange-Funktion auf. Dabei setzt sich die kinetische Energie T aus zwei Termen zusammen. Zunächst betrachtet man das Seilsegment, welches sich noch auf dem Tisch befindet, zum anderen das Stück, welches schon in der Luft hängt. Für das Ende des Seils, das sich noch auf dem Tisch befindet, gilt folgendes: $x = l - z$ mit $\dot{x} = -\dot{z}$.

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\rho x \dot{x}^2 + \frac{1}{2}\rho z \dot{z}^2 \\
&= \frac{1}{2}\rho(l - z)(-\dot{z})^2 + \frac{1}{2}\rho z \dot{z}^2 \\
&= \frac{1}{2}\rho l \dot{z}^2
\end{aligned}$$

Da wir eine kontinuierliche Massenverteilung haben, muss die potentielle Energie über ein Integral berechnet werden.

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^z -g\rho z' dz' \\
&= -g\rho\left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^z \\
&= -\frac{1}{2}g\rho z^2
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich als Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}\rho l \dot{z}^2 + \frac{1}{2} g\rho z^2 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= g\rho z \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} &= \rho l \dot{z} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} &= \rho l \ddot{z} \end{aligned}$$

Somit lautet die Bewegungsgleichung

$$\rho l \ddot{z} - g\rho z = 0$$

c) Zunächst wird diese homogene Differentialgleichung gelöst. Dazu wählt man als Ansatz $z(t) = e^{\lambda t}$.

$$\begin{aligned} \rho l \lambda^2 - g\rho &= 0 \\ \lambda^2 - \frac{g}{l} &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \pm\sqrt{\frac{g}{l}} \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet nun

$$z(t) = Ae^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} + Be^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t}$$

Mit $z(0) = a$ und $\dot{z}(0) = 0$ ergibt sich dann folgendes:

$$\begin{aligned} z(0) &= a \\ a &= A + B \\ \dot{z}(t) &= A\sqrt{\frac{g}{l}}e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} - \sqrt{\frac{g}{l}}Be^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t} \\ \dot{z}(0) &= 0 \\ 0 &= A\sqrt{\frac{g}{l}} - B\sqrt{\frac{g}{l}} \\ \Rightarrow A &= B \\ \Rightarrow a &= 2A \\ A &= \frac{a}{2} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich dann

$$z(t) = \frac{a}{2}e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} + \frac{a}{2}e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t}$$

Aufgabe 2

Die Masse des Zylinders lässt sich über ein Volumenintegral berechnen.

$$
\begin{aligned}
M &= \int_{r=0}^{R}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{H} \rho_0 r z^2 \; r dr d\phi dz \\
&= \rho_0 \int_{r=0}^{R} r^2 dr * \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi * \int_{z=0}^{H} z^2 dz \\
&= \rho_0 \left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^R * [\phi]_0^{2\pi} * \left[\frac{1}{3}z^3\right]_0^H \\
&= \frac{2}{9}\pi\rho_0 R^3 H^3
\end{aligned}
$$

Der Schwerpunkt ergibt sich durch

$$
\begin{aligned}
\vec{R}_S &= \frac{1}{M}\int_{r=0}^{R}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{H} \rho_0 r z^2 \vec{r} \; r dr d\phi dz \\
R_{Sr} &= \frac{1}{M}\int_{r=0}^{R}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{H} \rho_0 r z^2 r \; r dr d\phi dz \\
&= \frac{\rho_0}{M}\int_{r=0}^{R} r^3 dr * \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi * \int_{z=0}^{H} z^2 dz \\
&= \frac{\rho_0}{M}\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^R [\phi]_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3}z^3\right]_0^H \\
&= \frac{\pi\rho_0}{6M}R^4H^3 = \frac{\frac{\pi\rho_0}{6}R^4H^3}{\frac{2}{9}\pi\rho_0R^3H^3} = \frac{3}{4}R \\
R_{S\phi} &= \frac{1}{M}\int_{r=0}^{R}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{H} \rho_0 r z^2 \phi \; r dr d\phi dz \\
&= \frac{\rho_0}{M}\int_{r=0}^{R} r^2 dr * \int_{\phi=0}^{2\pi} \phi d\phi * \int_{z=0}^{H} z^2 dz \\
&= \frac{\rho_0}{M}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^R \left[\frac{1}{2}\phi^2\right]_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3}z^3\right]_0^H \\
&= \frac{2\pi^2\rho_0}{9M}R^3H^3 = \frac{\frac{2\pi^2\rho_0}{9}R^3H^3}{\frac{2}{9}\pi\rho_0R^3H^3} = \pi \\
R_{Sz} &= \frac{1}{M}\int_{r=0}^{R}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{H} \rho_0 r z^2 z \; r dr d\phi dz \\
&= \frac{\rho_0}{M}\int_{r=0}^{R} r^2 dr * \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi * \int_{z=0}^{H} z^3 dz \\
&= \frac{\rho_0}{M}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^R [\phi]_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4}z^4\right]_0^H \\
&= \frac{\pi\rho_0}{6M}R^3H^4 = \frac{\frac{\pi\rho_0}{6}R^3H^4}{\frac{2}{9}\pi\rho_0R^3H^3} = \frac{3}{4}H
\end{aligned}
$$

Damit ist der Schwerpunkt bei $\vec{R}_S = (\frac{3}{4}R, \pi, \frac{3}{4}H)$. Jetzt wird noch in kartesische Koordinaten umgerechnet. Es gilt

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi \\ &= \frac{3}{4}R * \cos\pi = -\frac{3}{4}R \\ y &= r\sin\phi \\ &= \frac{3}{4}R * \sin\pi = 0 \\ z &= z = \frac{3}{4}H \end{aligned}$$

Damit lautet der Schwerpunkt in kartesischen Koordinaten dann $\vec{R}_S = (-\frac{3}{4}R, 0, \frac{3}{4}H)$.