Theoretische Physik für LAK 1: Übung 5

von
Naja v. Schmude (4127652), Gruppe: Montag

Aufgabe 1

a) Es ist die Arbeit W zu berechnen, die aufgebracht werden muss, um einen Massepunkt von $(0,0,0)$ nach $(1,1,2)a$ in einem Kraftfeld $\vec{F} = F_0 a^{-3}(x^3 - xyz, x^2y, xy^2)$ zu bewegen.

Nach unserem „Kochrezept" kann nun die Arbeit $W = -\int \vec{F} d\vec{r}$ berechnet werden.

1. Weg parametrisieren. Es entsteht $\vec{r} = (\alpha, \alpha, 2\alpha)a$ mit $\alpha \in [0,1]$.
2. $d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{d\alpha} d\alpha$ muss nun berechnet werden.

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \frac{d\vec{r}}{d\alpha}\ d\alpha \\ &= \frac{d(\alpha,\alpha,2\alpha)a}{d\alpha}\ d\alpha \\ &= (1,1,2)a\ d\alpha \end{aligned}$$

3. Nun wird das Skalarprodukt $\vec{F} * d\vec{r} = \vec{F} * \frac{d\vec{r}}{d\alpha} d\alpha$ berechnet.

$$\begin{aligned} \vec{F} * d\vec{r} &= \vec{F} * \frac{d\vec{r}}{d\alpha}\ d\alpha \\ &= F_0 a^{-3}(x^3 - xyz, x^2y, xy^2) * (1,1,2)a\ d\alpha \\ &= F_0 a^{-2}(x^3 - xyz + x^2y + 2xy^2)\ d\alpha \\ &= F_0 a^{-2}(x(x^2 - yz + xy + 2y^2))\ d\alpha \end{aligned}$$

4. Nun müssten hier wieder x, y und z durch die Parametrisierung ersetzt werden.

$$\begin{aligned} \vec{F} * d\vec{r} &= F_0 a^{-2}(\alpha^3 - 2\alpha^3 + \alpha^3 + 2\alpha^3) d\alpha \\ &= F_0 a^{-2}(2\alpha^3) d\alpha \end{aligned}$$

5. Dies wird nun integriert.

$$\begin{aligned}\int \vec{F} d\vec{r} &= \int \vec{F} \frac{d\vec{r}}{d\alpha}\ d\alpha \\ &= \int_0^1 F_0 a^{-2}(2\alpha^3)\ d\alpha \\ &= F_0 a^{-2} \int_0^1 2\alpha^3 d\alpha \\ &= F_0 a^{-2} \left[\frac{1}{2}\alpha^4\right]_0^1 \\ &= F_0 a^{-2} * \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} F_0 a^{-2}\end{aligned}$$

Die zu verrichtende Arbeit ist also $W = -\frac{1}{2}F_0 a^{-2}$.

b) Zunächst wird das Masseteilchen auf direktem Wege, also von Punkt $(0,0,0)$ nach $(0,0,1)h$ befördert. Auch hier muss man wieder die einzelnen Schritte durchgehen. Wir gehen von der Kraft $\vec{F} = (ma_x, ma_y, ma_z)$ aus.
Die Parametrisierung ergibt sich als $(0,0,\alpha)h$ mit $\alpha \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}d\vec{r} &= \frac{d\vec{r}}{d\alpha} d\alpha \\ &= \frac{(0,0,\alpha)h}{d\alpha} d\alpha \\ &= (0,0,1)h d\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{F} d\vec{r} &= \vec{F} \frac{d\vec{r}}{d\alpha} d\alpha \\ &= (ma_x, ma_y, ma_z) * (0,0,1)h d\alpha \\ &= ma_z h d\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \vec{F} d\vec{r} &= \int_0^1 ma_z h d\alpha \\ &= ma_z h\end{aligned}$$

Die Arbeit ist hier also $W = -ma_z h$. Nun für den zweiten Weg von $(0,0,0)$ nach $\frac{1}{\tan\phi}, 0, 1)h$, was dem Punkt auf Höhe h der schiefen Ebene entspricht, die einen Winkel von ϕ hat. Die Parametrisierung ergibt sich als $(\frac{1}{\tan\phi}\alpha, 0, \alpha)h$ mit $\alpha \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}d\vec{r} &= \frac{d\vec{r}}{d\alpha} d\alpha \\ &= \frac{(\frac{1}{\tan\phi}\alpha, 0, \alpha)h}{d\alpha} d\alpha \\ &= (\frac{1}{\tan\phi}, 0, 1)h d\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{F} d\vec{r} &= \vec{F} \frac{d\vec{r}}{d\alpha} d\alpha \\ &= (ma_x, ma_y, ma_z) * (\frac{1}{\tan\phi}, 0, 1)h d\alpha \\ &= \frac{ma_x h}{\tan\phi} + ma_z h\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \vec{F} d\vec{r} &= \int_0^1 \frac{ma_x h}{\tan\phi} + ma_z h d\alpha \\ &= \frac{ma_x h}{\tan\phi} + ma_z h\end{aligned}$$

Die Arbeit ist hier also $W = -\frac{ma_x h}{\tan\phi} + ma_z h$.

Aufgabe 2

Ob ein Kraftfeld ein Potenzial besitzt hängt von folgenden Bedingungen ab:

- Die Kraft hängen nur von $\vec{r}$, nicht aber von $\vec{v}$ oder t ab
- Die Rotation $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$.

Die erste Bedingung ist für die beiden gegebenen Kraftfelder $\vec{F_1}(\vec{r}) = F_0 a^{-2}(x^2, -x^2, yz)$ und $\vec{F_2}(\vec{r}) = F_0 a^{-1/2}(x^3 + y^3)^{-1/2}(x^2, y^2, 0)$ natürlich erfüllt. Bleibt die 2. zu prüfen.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{F_1}(\vec{r}) &= F_0 a^{-2} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & -x^2 & yz \end{vmatrix} \\ &= \vec{e}_x \left(\frac{\partial yz}{\partial y} - \frac{\partial - x^2}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial x^2}{\partial z} - \frac{\partial yz}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial - x^2}{\partial x} - \frac{\partial x^2}{\partial y} \right) \\ &= F_0 a^{-2}(z, 0, -2x)\end{aligned}$$

Die Rotation verschwindet hier nicht, daher gibt es in diesem Kraftfeld kein Potenzial.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{F_2}(\vec{r}) &= F_0 a^{-1/2}(x^3 + y^3)^{-1/2} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= F_0 a^{-1/2}(x^3 + y^3)^{-1/2} \left(\vec{e}_x \left(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial y^2}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial x^2}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial y^2}{\partial x} - \frac{\partial x^2}{\partial y} \right) \right) \\ &= F_0 a^{-1/2}(x^3 + y^3)^{-1/2}(0, 0, 0) \\ &= (0, 0, 0)\end{aligned}$$

Da die Rotation hier verschwindet, gibt es hier ein Potenzial. Dies lässt sich berechnen über

$$\begin{aligned}
V(x,y,z) &= -\int F_x dx + f(y,z) \\
V(x,y,z) &= -\int F_y dy + f(x,z) \\
V(x,y,z) &= -\int F_z dz + f(x,y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(x,y,z) &= -F_0 a^{-1/2}(x^3+y^3)^{-1/2} \int^x x^2 dx + f(y,z) \\
V(x,y,z) &= -F_0 a^{-1/2}(x^3+y^3)^{-1/2} \int^y y^2 dy + f(x,z) \\
V(x,y,z) &= -F_0 a^{-1/2}(x^3+y^3)^{-1/2} \int^z 0 dz + f(x,y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(x,y,z) &= -F_0 a^{-1/2}(x^3+y^3)^{-1/2} \left[\frac{1}{3}x^3\right]^x + f(y,z) \\
V(x,y,z) &= -F_0 a^{-1/2}(x^3+y^3)^{-1/2} \left[\frac{1}{3}y^3\right]^y + f(x,z) \\
V(x,y,z) &= -F_0 a^{-1/2}(x^3+y^3)^{-1/2} [0]^z + f(x,y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(x,y,z) &= -F_0 a^{-1/2}(x^3+y^3)^{-1/2} \left(\frac{1}{3}x^3\right) + f(y,z) \\
V(x,y,z) &= -F_0 a^{-1/2}(x^3+y^3)^{-1/2} \left(\frac{1}{3}y^3\right) + f(x,z) \\
V(x,y,z) &= -f(x,y) \\
\Rightarrow V(x,y,z) &= -F_0 a^{-1/2}(x^3+y^3)^{-1/2} \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3\right) + c
\end{aligned}$$

Mit $V(0,0,0) = 2V_0$ kann jetzt c bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
V(0,0,0 &= 2V_0 \\
-F_0 a^{-1/2}(0^3+0^3)^{-1/2} \left(\frac{1}{3}0^3 + \frac{1}{3}0^3\right) + c &= 2V_0 \\
c &= 2V_0
\end{aligned}$$

Das Potential ist also

$$V(\vec{r}) = -F_0 a^{-1/2}(x^3+y^3)^{-1/2} \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3\right) + 2V_0$$

Die Arbeit ergibt sich dann als Differenz der Potentiale der zwei Wegpunkte.

$$\begin{aligned}
W &= V(2a,1a,1a) - V(1a,1a,1a)\\
&= -F_0 a^{-1/2}((2a)^3 + a^3)^{-1/2}\left(\frac{1}{3}(2a)^3 + \frac{1}{3}a^3\right) + 2V_0 - \left(-F_0 a^{-1/2}(a^3+a^3)^{-1/2}\left(\frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{3}a^3\right) + 2V_0\right)\\
&= -F_0 a^{-1/2}\sqrt{a^3} + 2V_0 - \left(-\frac{2a^3}{3}\frac{1}{\sqrt{2a^3}}F_0 a^{-1/2} + 2V_0\right)\\
&= -F_0 a^{-1/2}\left(\sqrt{a^3} + \frac{2a^3}{3}\frac{1}{\sqrt{2a^3}}\right)\\
&= -F_0 a^{-1/2}\left(\sqrt{a^3} + \frac{\sqrt{2a^3}}{3}\right)
\end{aligned}$$