# Theoretische Physik für LAK 1: Übung 13

von
Naja v. Schmude (4127652), Gruppe: Montag

## Aufgabe 1

a) Von dem 12 Übungsblatt ergibt sich als Schwerpunkt des Moleküls $\vec{R}_s = (0, \frac{a}{6}, 0)$. Wenn man nun den Schwerpunkt als Bezugspunkt des Trägheitstensors nimmt, so ergibt sich als Ortskoordinaten der Atome $\vec{r}_1 = (-\frac{a}{2}, -\frac{a}{6}, 0)$, $\vec{r}_2 = (\frac{a}{2}, -\frac{a}{6}, 0)$ und $\vec{r}_3 = (0, \frac{a}{3}, 0)$.
Nun muss Komponentenweise der Trägheitstensor berechnet werden:

$$
\begin{aligned}
I_{xx} &= \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2) \\
&= m\left(-\frac{a}{6}\right)^2 + m\left(-\frac{a}{6}\right)^2 + m\left(\frac{a}{3}\right)^2 \\
&= \frac{ma^2}{6} \\
I_{yy} &= \sum_i m_i(x_i^2 + z_i^2) \\
&= m\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + m\left(\frac{a}{2}\right)^2 \\
&= \frac{ma^2}{2} \\
I_{zz} &= \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) \\
&= m\left(\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{a}{6}\right)^2\right) + m\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{a}{6}\right)^2\right) + m\left(\frac{a}{3}\right)^2 \\
&= \frac{5ma^2}{18} + \frac{5ma^2}{18} + \frac{ma^2}{9} \\
&= \frac{2ma^2}{3} \\
I_{xy} = I_{yx} &= -\sum_i m_i x_i y_i \\
&= -\left(m\left(\frac{-a}{2} * \frac{-a}{6}\right) + m\left(\frac{a}{2} * \frac{-a}{6}\right)\right) \\
&= -\left(\frac{ma^2}{12} - \frac{ma^2}{12}\right) = 0 \\
I_{xz} = I_{zx} &= -\sum_i m_i x_i z_i = 0 \\
I_{yz} = I_{zy} &= -\sum_i m_i y_i z_i = 0
\end{aligned}
$$

Der Trägheitstensor ergibt sich also als

$$I_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \frac{ma^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2ma^2}{3} \end{pmatrix}$$

b) Nun soll der Trägheitstensor des Zylinders berechnet werden. Da ich mich auf dem 12 Blatt verrechnet hatte, nehme ich an, dass der Schwerpunkt bei $\vec{R}_s = (0, 0, \frac{3}{4}H)$ liegt. Man rechnet mit Zylinderkoordinaten, wodurch die Koordinaten des Trägheitstensors angepasst werden müssen. Es gilt $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ und $z = z$.

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= \int_{r=0}^{R}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{z=-3/4H}^{1/4H} \rho_0 r z^2 (r^2\sin^2\phi + z^2)\ r dr d\phi dz \\
&= \int_{r=0}^{R}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{z=-3/4H}^{1/4H} \rho_0 r^4 z^2 \sin^2\phi + \rho_0 r^2 z^4\ dr d\phi dz \\
&= \rho_0 \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^R * \left[\frac{1}{3}z^3\right]_{-3/4H}^{1/4H} * \left[\frac{1}{2}(\phi - \sin\phi\cos\phi)\right]_0^{2\pi} + \rho_0 * \left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^R * \left[\frac{1}{5}z^5\right]_{-3/4H}^{1/4H} * [\phi]_0^{2\pi} \\
&= \frac{\rho_0 R^4 * 7H^3 * \pi}{4 * 48} + \frac{\rho_0 R^3 * 244H^5 * 2\pi}{3 * 5 * 4^5} \\
I_{yy} &= \int_{r=0}^{R}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{z=-3/4H}^{1/4H} \rho_0 r z^2 (r^2\cos^2\phi + z^2)\ r dr d\phi dz \\
&= \int_{r=0}^{R}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{z=-3/4H}^{1/4H} \rho_0 r^4 z^2 \cos^2\phi + \rho_0 r^2 z^4\ dr d\phi dz \\
&= \rho_0 \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^R * \left[\frac{1}{3}z^3\right]_{-3/4H}^{1/4H} * \left[\frac{1}{2}(\phi + \sin\phi\cos\phi)\right]_0^{2\pi} + \rho_0 * \left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^R * \left[\frac{1}{5}z^5\right]_{-3/4H}^{1/4H} * [\phi]_0^{2\pi} \\
&= \frac{\rho_0 R^4 * 7H^3 * \pi}{4 * 48} + \frac{\rho_0 R^3 * 244H^5 * 2\pi}{3 * 5 * 4^5} \\
I_{zz} &= \int_{r=0}^{R}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{z=-3/4H}^{1/4H} \rho_0 r z^2 (r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi)\ r dr d\phi dz \\
&= \int_{r=0}^{R}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{z=-3/4H}^{1/4H} \rho_0 r^4 z^2\ dr d\phi dz \\
&= \rho_0 * \left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^R * [\phi]_0^{2\pi} * \left[\frac{1}{3}z^3\right]_{-3/4H}^{1/4H} \\
&= \frac{7\pi\rho_0 R^5 H^3}{120}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_{xy} = I_{yx} &= \int_{r=0}^{R}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{z=-3/4H}^{1/4H} \rho_0 r z^2 (r\cos\phi * r\sin\phi)\ r dr d\phi dz \\
&= \int_{r=0}^{R}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{z=-3/4H}^{1/4H} \rho_0 r^4 z^2 \cos\phi\sin\phi\ dr d\phi dz \\
&= \rho_0 \left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^R * \left[\frac{1}{3}z^3\right]_{-3/4H}^{1/4H} * \underbrace{\left[-\frac{1}{2}\cos^2\phi\right]_0^{2\pi}}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{yz} = I_{zy} &= \int_{r=0}^{R}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{z=-3/4H}^{1/4H} \rho_0 r z^2 (r z\sin\phi)\ r dr d\phi dz \\
&= \int_{r=0}^{R}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{z=-3/4H}^{1/4H} \rho_0 r^3 z^3 \sin\phi\ dr d\phi dz \\
&= \rho_0 \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^R * \left[\frac{1}{4}z^4\right]_{-3/4H}^{1/4H} * \underbrace{\left[-\cos\phi\right]_0^{2\pi}}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{xz} = I_{zx} &= \int_{r=0}^{R}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{z=-3/4H}^{1/4H} \rho_0 r z^2 (r z\cos\phi)\ r dr d\phi dz \\
&= \int_{r=0}^{R}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{z=-3/4H}^{1/4H} \rho_0 r^3 z^3 \cos\phi\ dr d\phi dz \\
&= \rho_0 \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^R * \left[\frac{1}{4}z^4\right]_{-3/4H}^{1/4H} * \underbrace{\left[\sin\phi\right]_0^{2\pi}}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

c) Nun kann mit Hilfe des Trägheitstensors die Rotationsenergie $T_{rot}$ berechnet werden. Es gilt $T_{rot} = \frac{1}{2}\left(\sum_{\alpha,\beta} I_{\alpha,\beta} n_\alpha n_\beta\right)\Omega^2$ mit $\vec{n} = \Omega_0(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.
Zunächst für das Molekül ...

$$
\begin{aligned}
T_{rot} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{\alpha,\beta} I_{\alpha,\beta} n_\alpha n_\beta\right)\Omega^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(I_{xx} * \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \underbrace{2I_{xz}}_{=0} * \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + I_{zz} * \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right) * \Omega_0^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} * \frac{ma^2}{6} + \frac{1}{2} * \frac{2ma^2}{3}\right) * \Omega_0^2 = \frac{5ma^2\Omega_0^2}{24}
\end{aligned}
$$

Und nun für den Zylinder.

$$
\begin{aligned}
T_{rot} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{\alpha,\beta} I_{\alpha,\beta} n_\alpha n_\beta\right)\Omega^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(I_{xx} * \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \underbrace{2I_{xz}}_{=0} * \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + I_{zz} * \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right) * \Omega_0^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} * \left(\frac{\rho_0 R^4 * 7H^3 * \pi}{4 * 48} + \frac{\rho_0 R^3 * 244H^5 * 2\pi}{3 * 5 * 4^5}\right) + \frac{1}{2} * \frac{7\pi\rho_0 R^5 H^3}{120}\right) * \Omega_0^2
\end{aligned}
$$

Für den Drehimpuls gilt $\vec{L} = I\vec{\Omega}$. Da $\Omega_y = 0$ und bei der Matrix nur die Diagonale $\neq 0$ ist, gilt für das Molekül:

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= I_{xx} * \Omega_x * \vec{e}_x + I_{zz} * \Omega_z * \vec{e}_z \\
\vec{L} &= \left( \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} * \frac{ma^2}{6}, 0, \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} * \frac{2ma^2}{3} \right)
\end{aligned}$$

und für den Zylinder:

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= I_{xx} * \Omega_x * \vec{e}_x + I_{zz} * \Omega_z * \vec{e}_z \\
\vec{L} &= \left( \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} * \left( \frac{\rho_0 R^4 * 7H^3 * \pi}{4 * 48} + \frac{\rho_0 R^3 * 244 H^5 * 2\pi}{3 * 5 * 4^5} \right), 0, \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} * \frac{7\pi\rho_0 R^5 H^3}{120} \right)
\end{aligned}$$

## Aufgabe 2

Dadurch das sich das Volumen verdoppelt, halbiert sich natürlich nach dem Gasgesetz $p \sim \frac{1}{V}$ der Druck, also $p_2 = \frac{1}{2}p_1$. Die Temperatur bleibt dabei konstant. Da sich die Teilchenzahl nicht ändert, verändert sich auch die Dichte $n_2 = \frac{N}{V_2} = \frac{N}{2V_1} = \frac{1}{2}n_1$.
Zu Beginn gilt $p_1 = \frac{1}{3}n_1 m v_1^2$, also $v_1^2 = \frac{3p_1}{mn_1}$. Wir wissen, dass sich der Druck und die Dichte ändert. Damit überprüfen wir nun, ob sich auch die Geschwindigkeit ändert.

$$\begin{aligned}
p_2 &= \frac{1}{3} n_2 m v_2^2 \\
\frac{p_1}{2} &= \frac{1}{3}\frac{n_1}{2} m (x v_1)^2 \\
\underbrace{\frac{3p_1}{n_1 m}}_{v_1^2} &= x^2 v_1^2 \\
x^2 &= 1
\end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit ändert sich also nicht. Und da die mittlere kinetische Energie von der mittleren Geschwindigkeit abhängig ist, so ändert sich diese auch nicht.