Theoretische Physik für LAK 1: Übung 7

von
Naja v. Schmude (4127652), Gruppe: Montag

Aufgabe 1

a)

b) Nun soll die Bewegungsgleichung über das d'Alembert Prinzip gefunden werden. Da wir nur einen Freiheitsgrad haben, müssen wir nur die folgende Formel berechnen:

$$(m\ddot{\vec{r}} - \vec{F})\delta\vec{r} = 0$$

Folgendes ergibt sich für die einzelnen Parameter (unter der Bedingung $z = x \sin x$):

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= (x, z) \\
\ddot{\vec{r}} &= (\ddot{x}, \ddot{z}) \\
\dot{z} &= \dot{x}\sin x + x\dot{x}\cos x \\
\ddot{z} &= \ddot{x}\sin x + \dot{x}^2\cos x + \dot{x}^2\cos x + x\ddot{x}\cos x - x\dot{x}^2\sin x \\
&= \ddot{x}\sin x + 2\dot{x}^2\cos x + x\ddot{x}\cos x - x\dot{x}^2\sin x \\
\delta\vec{r} &= (\delta x, \delta z) \\
\delta z &= \frac{\partial x \sin x}{\partial x}\delta x = (\sin x + x\cos x)\delta x
\end{aligned}$$

Als Kraft wirkt natürlich nur die Schwerkraft $\vec{F} = (0, -mg)$ Wir setzen alles zusammen:

$$\begin{aligned}
(m\ddot{\vec{r}} - \vec{F})\delta\vec{r} &= 0 \\
m(\ddot{x}, \ddot{z})(\delta x, \delta z) - (0, -mg)(\delta x, \delta z) &= 0 \\
m(\ddot{x}, \ddot{x}\sin x + 2\dot{x}^2\cos x + x\ddot{x}\cos x - x\dot{x}^2\sin x)(\delta x, (\sin x + x\cos x)\delta x) & \\
-(0, -mg)(\delta x, (\sin x + x\cos x)\delta x) &= 0 \\
m\ddot{x}\delta x + m(\ddot{x}\sin x + 2\dot{x}^2\cos x + x\ddot{x}\cos x - x\dot{x}^2\sin x)(\sin x + x\cos x)\delta x & \\
+mg(\sin x + x\cos x)\delta x &= 0 \\
\ddot{x} + (\ddot{x}\sin x + 2\dot{x}^2\cos x + x\ddot{x}\cos x - x\dot{x}^2\sin x)(\sin x + x\cos x) & \\
+g(\sin x + x\cos x) &= 0 \\
\ddot{x} + (\ddot{x}\sin x + 2\dot{x}^2\cos x + x\ddot{x}\cos x - x\dot{x}^2\sin x + g)(\sin x + x\cos x) &= 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Es ist die Lagrange-Funktion für den dreidimensionalen Wurf aufzustellen (f = 3). Die Lagrange-Funktion lautet $L = T - V$, daher muss zunächst T und V bestimmt werden.

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\ V &= mgz \\ L &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz \end{aligned}$$

Für alle Freiheitsgerade muss nun die folgende Gleichung gelöst werden

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{a}_i} - \frac{\partial L}{\partial a_i} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{\partial \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{\partial \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= \frac{\partial \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz}{\partial z} = -mg \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \frac{\partial \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= \frac{\partial \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} &= \frac{\partial \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \frac{d}{dt}m\dot{x} = m\ddot{x} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= \frac{d}{dt}m\dot{y} = m\ddot{y} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} &= \frac{d}{dt}m\dot{z} = m\ddot{z} \end{aligned}$$

Als Bewegungsgleichungen ergeben sich

$$\begin{aligned} I.&\quad m\ddot{x} = 0 \\ II.&\quad m\ddot{y} = 0 \\ III.&\quad m\ddot{z} + mg = 0 \end{aligned}$$

b) Es soll die Bewegungsgleichung zu dem Problem aus Aufgabe 1 mit der Lagrange-Funktion berechnet werden. Die Lagrange-Funktion lautet

$$L = T - V$$

Es gilt also die kinetische Energie T und die potentielle Energie V aufzustellen.

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) \\
&= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + (\dot{x}\sin x + x\dot{x}\cos x)^2) \\
&= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{x}^2\sin^2 x + 2x\dot{x}^2\sin x\cos x + x^2\dot{x}^2\cos^2 x) \\
&= \frac{m\dot{x}^2}{2}(1 + \sin^2 x + 2x\sin x\cos x + x^2\cos^2 x) \\
V &= mgz = mgx\sin x
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2}(1 + \sin^2 x + 2x\sin x\cos x + x^2\cos^2 x) - mgx\sin x$$

Die Bewegungsgleichung lässt sich nun berechnen über

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{\partial \frac{m\dot{x}^2}{2}(1 + \sin^2 x + 2x\sin x\cos x + x^2\cos^2 x) - mgx\sin x}{\partial x} \\
&= m\dot{x}^2\sin x\cos x + m\dot{x}^2(\sin x\cos x + x\cos^2 x - x\sin^2 x) \\
&+ m\dot{x}^2(x\cos^2 x - x^2\cos x\sin x) - mg(\sin x + x\cos x) \\
&= m\dot{x}^2(\sin x\cos x + \sin x\cos x + x\cos^2 x - x\sin^2 x \\
&+ x\cos^2 x - x^2\cos x\sin x) - mg(\sin x + x\cos x) \\
&= m\dot{x}^2(2\sin x\cos x + 2x\cos^2 x - x\sin^2 x - x^2\cos x\sin x) - mg(\sin x + x\cos x) \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \frac{\partial \frac{m\dot{x}^2}{2}(1 + \sin^2 x + 2x\sin x\cos x + x^2\cos^2 x) - mgx\sin x}{\partial \dot{x}} \\
&= m\dot{x} + m\dot{x}\sin^2 x + 2m\dot{x}x\sin x\cos x + m\dot{x}x^2\cos x \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \frac{d(m\dot{x} + m\dot{x}\sin^2 x + 2m\dot{x}x\sin x\cos x + m\dot{x}x^2\cos x)}{dt} \\
&= m\ddot{x} + m\ddot{x}\sin^2 x + 2m\dot{x}^2\sin x\cos x + 2m\ddot{x}x\sin x\cos x + 2m\dot{x}^2\sin x\cos x + 2m\dot{x}^2x\cos x \\
&- 2m\dot{x}^2x\sin x + m\ddot{x}x^2\cos^2 x + 2m\dot{x}^2x\cos^2 x - 2m\dot{x}^2x^2\cos x\sin x
\end{aligned}
$$

Die Lösung ergibt sich als

$$
\begin{aligned}
0 &= m\ddot{x} + m\ddot{x}\sin^2 x + 2m\dot{x}^2\sin x\cos x + 2m\ddot{x}x\sin x\cos x + 2m\dot{x}^2\sin x\cos x + 2m\dot{x}^2x\cos x \\
&- 2m\dot{x}^2x\sin x + m\ddot{x}x^2\cos^2 x + 2m\dot{x}^2x\cos^2 x - 2m\dot{x}^2x^2\cos x\sin x \\
&- (m\dot{x}^2(2\sin x\cos x + 2x\cos^2 x - x\sin^2 x - x^2\cos x\sin x) - mg(\sin x + x\cos x)) \\
&= \ddot{x} + \ddot{x}\sin^2 x + 2\ddot{x}x\sin x\cos x + 2\dot{x}^2\sin x\cos x + 2\dot{x}^2x\cos x \\
&- 2\dot{x}^2x\sin x + \ddot{x}x^2\cos^2 x - \dot{x}^2x^2\cos x\sin x + \dot{x}^2x\sin^2 x + g(\sin x + x\cos x) \\
&= \ddot{x} + \ddot{x}(\sin x + x\cos x)^2 + 2\dot{x}^2\sin x\cos x + 2\dot{x}^2x\cos x \\
&- 2\dot{x}^2x\sin x - \dot{x}^2x^2\cos x\sin x + \dot{x}^2x\sin^2 x + g(\sin x + x\cos x)
\end{aligned}
$$