Theoretische Physik für LAK 1: Übung 01

von
Naja v. Schmude (4127652), Gruppe: Montag

Aufgabe 1

$\vec{A}$ hat die Koordinate (1,1,1) in dem gedrehten Koordinatensystem. Wie findet man nun die Koordinaten im normalen System raus? Man kann sich das ganze grafisch überlegen:

Der Vektor liegt also direkt auf der X-Achse (daher $x = 0$) und die Z-Komponente ändert sich durch die Drehung auch nicht, daher bleibt dies bei $z = 1$. Wie durch die Grafik erklärt, ist $y = \sqrt{2} \approx 1,4142$, damit ergibt sich $\vec{A}$ in dem Koordinatensystem (x, y, z) als $(0, \sqrt{2}, 1)$.

Aufgabe 2

$\vec{r_1}$ beschreibt eine parabellförmige Bahnkurve in der XZ-Ebene. $\vec{r_2}$ beschreibt eine Spirale, deren Kreise parallel zur XY-Ebene liegen und die sich entlang der Z-Achse aufrollt. Die Spirale macht dabei Drehungen im Uhrzeigersinn mit größer werdendem t.
Die Ableitungen ergeben sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{r_1}}(t) &= (\dot{\vec{r_1}}_x, \dot{\vec{r_1}}_y, \dot{\vec{r_1}}_z) \\
&= a_0(1/\tau, 0, 2t/\tau) \\
\dot{\vec{r_2}}(t) &= (\dot{\vec{r_2}}_x, \dot{\vec{r_2}}_y, \dot{\vec{r_2}}_z) \\
&= a_0(\cos(\omega t) * \omega, -\sin(\omega t) * \omega, 1/\tau)
\end{aligned}$$

Die Ableitung von $\vec{r_1}$ beschreibt eine Gerade, die in Parallel zur Z-Achse liegt und zwar durch den Punkt gehend, der durch $x = 1, y = 0$ gekennzeichnet ist.
Die Ableitung von $\vec{r_2}$ beschreibt einen Kreis in der Ebene XY mit festen $z = 1/\tau$, der sich bei größer werdenden t entgegen den Uhrzeigersinn aufbaut.
Die Integrale ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}
\int_0^t \vec{r_1}(t')dt' &= a_0\vec{e_x}\int_0^t \frac{t'}{\tau}dt' + a_0\vec{e_y}\int_0^t 0dt' + a_0\vec{e_z}\int_0^t \frac{t^2}{\tau^2}dt' \\
&= a_0\vec{e_x}\left[\frac{t'^2}{2\tau}\right]_0^t + a_0\vec{e_y}\,[c]_0^t + a_0\vec{e_z}\left[\frac{t'^3}{3\tau^2}\right]_0^t \\
&= a_0\vec{e_x}\frac{t^2}{2\tau} + a_0\vec{e_z}\frac{t^3}{3\tau^2} \\
&= a_0(t^2/2\tau, 0, t^3/3\tau^2)
\end{aligned}$$

Dies beschreibt dann ungefähr eine Hyperbel in der XZ-Ebene.

$$\begin{aligned}
\int_0^t \vec{r_1}(t')dt' &= a_0\vec{e_x}\int_0^t \sin(\omega t')dt' + a_0\vec{e_y}\int_0^t \cos(\omega t')dt' + a_0\vec{e_z}\int_0^t \frac{t'}{\tau}dt' \\
&= a_0\vec{e_x}\left[-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t')\right]_0^t + a_0\vec{e_y}\left[\frac{1}{\omega}\sin(\omega t')\right]_0^t + a_0\vec{e_z}\left[\frac{t'^2}{2\tau}\right]_0^t \\
&= a_0\vec{e_x}\left(-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t) + \frac{1}{\omega}\right) + a_0\vec{e_y}\frac{1}{\omega}\sin(\omega t) + a_0\vec{e_z}\frac{t^2}{3\tau} \\
&= a_0\left(-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t) + \frac{1}{\omega}, \frac{1}{\omega}\sin(\omega t), \frac{t^2}{2\tau}\right)
\end{aligned}$$

Dies beschreibt wieder eine spiralförmige Kreisbahn, die sich entlang der Z-Achse aufrollt.