Theoretische Physik für LAK 1: Übung 6

von
Naja v. Schmude (4127652), Gruppe: Montag

Aufgabe 1

Damit die Leiter nicht kippt, müssen sich alle wirkenden Kräfte zu null addieren - also gegenseitig ausgleichen. Auf die Leiter wirken folgende Kräfte: $\vec{G}_P$ (Gewichtskraft der Person), $\vec{G}_L$ (Gewichtskraft der Leiter), $\vec{R_H}$ (Haftreibung am Boden), $\vec{N}_B$ (Normalkraft am Boden), $\vec{N}_W$ (Normalkraft an der Wand).
Da die Kräfte alle entweder nur in x oder z Richtung wirken, kann man jeweils alle in x-Richtung 0 setzen und alle in z Richtung.
In x-Richtung:

$$
\begin{aligned}
\vec{R}_H + \vec{N}_W &= 0 \\
\vec{N}_W &= -\vec{R}_H \\
N_W &= \mu_H
\end{aligned}
$$

In z-Richtung:

$$
\begin{aligned}
\vec{G}_P + \vec{G}_L + \vec{N}_B &= 0 \\
\vec{N}_B &= -\vec{G}_P - \vec{G}_L \\
N_B &= (m+M)g
\end{aligned}
$$

Zusätzlich müssen sich alle Drehmomente zu Null addieren, in dem Fall gibt es nur eins, und zwar ist der Drehpunkt die Berührungsstelle der Leiter am Boden. Die hier angreifende Kraft ist $\vec{F} = \vec{N}_W + \vec{G}_L + \vec{G}_P$. Der Hebelarm ist die Leiter: $\vec{s} = (-x, 0, y)$. Mit $x = \frac{h}{\tan\phi}$ und $y = l\sin\phi$. Das Drehmoment ergibt sich als

$$
\begin{aligned}
\vec{N} &= \vec{s} \times \vec{F} \\
&= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -\frac{h}{\tan\phi} & 0 & l\sin\phi \\ \mu_H & 0 & -(M+m)g \end{vmatrix} \\
&= (0, l\sin\phi\mu_H - (M+m)g * \frac{h}{\tan\phi}, 0) \\
N &= l\sin\phi\mu_H - (M+m)g\frac{h}{\tan\phi} \\
N &= 0 \\
l\sin\phi\mu_H &= -(M+m)g\frac{h}{\tan\phi} \\
h &= \frac{l\sin\phi\mu_h * \tan\phi}{-(M+m)g}
\end{aligned}
$$

Für $\phi = 30°$ ergibt sich für die Höhe, zu der eine Person hochsteigen kann, ohne dass die Leiter kippt

$$
h = \frac{0,289 l\mu_h}{-(M+m)g}
$$

Aufgabe 2

a) Ein Satellit soll in eine geostationäre Bahn gebracht werden. Damit er in der Position verharrt, muss die Gewichtskraft, die auf den Satelliten wirkt, genauso groß sein wie die der Erdrotation entgegenwirkende Zentrifugalkraft. $\vec{G} + \vec{F}_{ZF} = 0$.

$$\begin{aligned} \vec{G} + \vec{F}_{ZF} &= 0 \\ -M\vec{g} &= -M\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{h}) \end{aligned}$$

Da $\vec{\omega}$ und $\vec{h}$ senkrecht aufeinander stehen, kann auf das Ausrechnen des Vektorprodukts verzichtet werden.

$$\begin{aligned} -Mg &= -M\omega * \omega h \\ h &= \frac{g}{\omega^2} \\ h &= \frac{9,81 m/s^2}{(7,27 * 10^{-5} Hz)^2} \\ &= 1,856 * 10^9 m \end{aligned}$$

Um nun den Satelliten von der Erdoberfläche auf diese Bahn zu bringen, muss eine Distanz $d = h - r = 1,856 * 10^9 m - 6,4 * 10^6 m = 1,8496 * 10^9 m$ überwunden werden. Die Arbeit beträgt

$$\begin{aligned} W &= -F * d \\ W &= Mgd \\ W &= M * 1,814 * 10^{10} \frac{m^2}{s^2} \end{aligned}$$

b) Die Corioliskraft und die Zentrifugalkraft sind zu berechnen.

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_C \\ &= 2m\vec{v} \times \vec{\omega} \\ &= 2m|\vec{v}||\vec{\omega}| * \sin\alpha \end{aligned}$$

Der Zwischenwinkel beträgt 60° (siehe Skizze). Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} F &= 2 * 100kg * \frac{2\pi}{1d} * 200\frac{km}{h} * \sin(60°) \\ &= 0,6998N \end{aligned}$$

Über die Rechte-Hand-Regel erhält man die Richtung der Corioliskraft. Sie wirkt nach Osten. Nun zur Zentrifugalkraft.

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_{ZF} \\ &= -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= -m \mid \vec{\omega} \mid (|\vec{\omega}||\vec{r}| \sin\alpha) \sin\beta \end{aligned}$$

Der von $\vec{\omega}$ und $\vec{r}$ eingeschlossene Winkel α beträgt 60°. Da der vom Kreuzprodukt resultierende Vektor $\vec{\omega} \times \vec{r}$ nach Westen zeigt und somit senkrecht zu $\vec{\omega}$ steht, ist Winkel $\beta = 90°$.

$$\begin{aligned} F &= -m \mid \vec{\omega} \mid (|\vec{\omega}||\vec{r}| \sin\alpha) \sin\beta \\ &= -100kg * \frac{2\pi}{1d} * \left(\frac{2\pi}{1d} * 100km * \sin(60°)\right) * \sin(90°) \\ &= -0,0458N \end{aligned}$$