Theoretische Physik für LAK 1: Übung 3

von
Naja v. Schmude (4127652), Gruppe: Montag

Aufgabe 1

a) Für den Wurf gilt $m\ddot{z} = -mg$. Aus der Vorlesung wissen wir (angepasst für den hier vorliegenden Fall)

$$\vec{r}(t) = -\frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \dot{\vec{r}}(0)t + \vec{r}(0)$$

Gegeben ist des weiteren: $\vec{r}_0 = (0, 0, z_0)$ und $v_0 = \frac{z_0}{\tau}$. Da der Winkel zwischen der z-Achse und $\vec{v}_0$ $\gamma = \frac{\pi}{4}$ beträgt, kann der Geschwindigkeitsvektor berechnet werden.

$$\begin{aligned}\vec{v}_0 &= (x_v, 0, z_v)\\ \vec{v}_0 &= (v_0 \sin\gamma, 0, v_0 \cos\gamma)\end{aligned}$$

Damit ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= -\frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0\\ &= -\frac{1}{2}\vec{g}t^2 + (v_0\sin\gamma, 0, v_0\cos\gamma)t + (0, 0, z_0)\\ &= -\frac{1}{2}\vec{g}t^2 + (\frac{z_0}{\tau}\sin\gamma, 0, \frac{z_0}{\tau}\cos\gamma)t + (0, 0, z_0)\end{aligned}$$

Jetzt ist der Abstand der Masse vom Startpunkt zum Zeitpunkt $t = \tau$ zu bestimmen. Dazu bestimmt man zunächst die Position der Masse zu diesem Zeitpunkt.

$$\begin{aligned}\vec{r}(\tau) &= -\frac{1}{2}g\tau^2\vec{e}_z + (\frac{z_0}{\tau}\sin\gamma, 0, \frac{z_0}{\tau}\cos\gamma)\tau + (0, 0, z_0)\\ &= (0, 0 - \frac{g\tau^2}{2}) + (z_0\sin\gamma, 0, z_0\cos\gamma) + (0, 0, z_0)\\ &= \left(z_0\sin\gamma, 0, -\frac{g\tau^2}{2} + z_0(\cos\gamma + 1)\right)\end{aligned}$$

Der Abstand zwischen r_0 und $r(\tau)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}d &= |\vec{r}_0 - \vec{r}_\tau|\\ &= \sqrt{(0 - z_0\sin\gamma)^2 + 0^2 + (z_0 - (-\frac{\gamma\tau^2}{2} + z_0(\cos\gamma + 1)))^2}\\ &= \sqrt{z_0^2\sin^2\gamma + (z_0 + \frac{\gamma\tau^2}{2} - z_0\cos\gamma - z_0)^2}\\ &= \sqrt{z_0^2\sin^2\gamma + (\frac{\gamma\tau^2}{2} - z_0\cos\gamma)^2}\end{aligned}$$

b) Mit stokes'scher Reibung verändert sich die Differentialgleichung zu

$$m\ddot{z}(t) = -mg - f_v\dot{z}(t)$$

Umgestellt ergibt dies $m\ddot{z}(t)+f_v\dot{z}(t) = -mg$. Diese inhomogene DGL ist nun unter den Anfangsbedingungen $z(0) = 0$ und $\dot{z}(0) = v_0$ zu lösen. Wir wählen als Ansatz $z(t) = e^{\lambda t}$ ($\dot{z}(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $\ddot{z}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$) um die zugehörige homogene DGL zu lösen.

$$\begin{aligned} m\lambda^2 e^{\lambda t} + f_v\lambda e^{\lambda t} &= 0 \\ m\lambda^2 + f_v &= 0 \\ \lambda^2 &= -\frac{f_v}{m} \\ \lambda_{1,2} &= \pm\frac{f_v}{m}i \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für die allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$\begin{aligned} z(t) &= Ae^{\frac{f_v}{m}it} + Be^{-\frac{f_v}{m}it} \\ &= A\left(\cos(\frac{f_v}{m}t) + i\sin(\frac{f_v}{m}t)\right) + B\left(\cos(\frac{f_v}{m}t) - i\sin(\frac{f_v}{m}t)\right) \\ &= \underbrace{(A+B)}_{a}\cos(\frac{f_v}{m}t) + \underbrace{(A-B)i}_{b}\sin(\frac{f_v}{m}t) \\ &= a\cos(\frac{f_v}{m}t) + b\sin(\frac{f_v}{m}t) \end{aligned}$$

Jetzt muss eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL geraten werden. Wir wählen als Ansatz $z(t) = ct$ ($\dot{z}(t) = c$, $\ddot{z}(t) = 0$).

$$\begin{aligned} f_v c &= -mg \\ c &= \frac{-mg}{f_v} \end{aligned}$$

Es ergibt sich nun

$$\begin{aligned} z(t) &= a\cos(\frac{f_v}{m}t) + b\sin(\frac{f_v}{m}t) - \frac{mg}{f_v}t \\ \dot{z}(t) &= -\frac{f_v}{m}a\sin(\frac{f_v}{m}t) + \frac{f_v}{m}b\cos(\frac{f_v}{m}t) - \frac{mg}{f_v} \\ z(0) &= 0 \\ a\cos(0) + b\sin(0) - \frac{mg}{f_v} * 0 &= 0 \\ a &= 0 \\ \dot{z}(0) &= v_0 \\ -\frac{f_v}{m}a\sin(0) + \frac{f_v}{m}b\cos(0) - \frac{mg}{f_v} &= v_0 \\ \frac{f_v}{m}b - \frac{mg}{f_v} &= v_0 \\ b &= \frac{(v_0 + \frac{mg}{f_v})m}{f_v} \end{aligned}$$

Als Endlösung ergibt sich

$$z(t) = \frac{(v_0 + \frac{mg}{f_v})m}{f_v}\sin(\frac{f_v}{m}t) - \frac{mg}{f_v}t$$

Aufgabe 2

Es sollen jeweils zu den gegebenen inhomogenen Differenzialgleichungen unter den Anfangsbedingungen $x(0) = 2$ und $\dot{x}(0) = 0$ die allgemeine Lösungen gefunden werden.

1. Die Differentialgleichung lautet $\ddot{x}(t) + 5x(t) = 1$. Zunächst ist die dazugehörige homogene Differentialgleichung $\ddot{x}(t) + 5x(t) = 0$ zu lösen. Dazu wählen wir den Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ mit $\dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t}$ und $\ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$.

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + 5x(t) &= 0 \\ \lambda^2 e^{\lambda t} + 5e^{\lambda t} &= 0 \\ \lambda^2 &= -5 \\ \lambda_{1/2} &= \pm\sqrt{5}i \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL ergibt sich dann zu

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{\sqrt{5}it} + Be^{-\sqrt{5}it} \quad | \text{ Euler-Formel anwenden} \\ &= A\left(\cos(\sqrt{5}t) + i\sin(\sqrt{5}t)\right) + B\left(\cos(\sqrt{5}t) - i\sin(\sqrt{5}t)\right) \\ &= \underbrace{(A+B)}_{a}\cos(\sqrt{5}t) + \underbrace{(A-B)i}_{b}\sin(\sqrt{5}t) \\ &= a\cos(\sqrt{5}t) + b\sin(\sqrt{5}t) \end{aligned}$$

Nun „raten“ wir eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL. Als Ansatz probiert man $x(t) = c$ ($\dot{x}(t) = 0$, $\ddot{x}(t) = 0$).

$$\begin{aligned} 5c &= 1 \\ c &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Durch Addition der allgemeinen Lösung der homogenen DGL und der speziellen Lösung der inhomogenen DGL findet man die allgemeine Lösung mit Hilfe der Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} x(t) &= a\cos(\sqrt{5}t) + b\sin(\sqrt{5}t) + \frac{1}{5} \\ \dot{x}(t) &= -\sqrt{5}a\sin(\sqrt{5}t) + \sqrt{5}b\cos(\sqrt{5}t) \\ x(0) &= 2 \\ a\cos(0) + b\sin(0) + \frac{1}{5} &= 2 \\ a &= \frac{9}{5} \\ \cot x(0) &= 0 \\ -\sqrt{5}a\sin(0) + \sqrt{5}b\cos(0) &= 0 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösung lautet also

$$x(t) = \frac{9}{5}\cos(\sqrt{5}t) + \frac{1}{5}$$

2. Die Differentialgleichung lautet $\ddot{x}(t) + 5x(t) = t^2 + 1$. Auch hier ist wieder zunächst die zugehörige homogene Differentialgleichung $\ddot{x}(t) + 5x(t) = 0$ zu lösen. Dies ist

die selbe wie oben, und es ergibt sich also $x(t) = a\cos(\sqrt{5}t) + b\sin(\sqrt{5}t)$.
Nun muss eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL geraten werden. Wir wählen als Ansatz $x(t) = ct^2 + d$ ($\dot{x}(t) = 2ct$, $\ddot{x}(t) = 2c$).

$$\begin{aligned}
2c + 5*(ct^2 + d) &= t^2 + 1 \\
2c + 5ct^2 + 5d &= t^2 + 1 \\
\Rightarrow 5ct^2 &= t^2 \\
c &= 0,2 \\
2c + 5d &= 1 \\
0,4 + 5d &= 1 \\
d &= 0,12 \\
x(t) &= 0,2t^2 + 0,12
\end{aligned}$$

Jetzt wird wieder die Lösung der homogenen DGL und die spezielle Lösung der inhomogenen DGL addiert. Mit den Anfangsbedingungen ergibt sich dann wieder die gesuchte Lösung.

$$\begin{aligned}
x(t) &= a\cos(\sqrt{5}t) + b\sin(\sqrt{5}t) + 0,2t^2 + 0,12 \\
\dot{x}(t) &= -\sqrt{5}a\sin(\sqrt{5}t) + \sqrt{5}b\cos(\sqrt{5}t) + 0,4t \\
x(0) &= 2 \\
a\cos(0) + b\sin(0) + 0,2*0^2 + 0,12 &= 2 \\
a + 0,12 &= 2 \\
a &= 1,88 \\
\dot{x}(t) &= 0 \\
-\sqrt{5}a\sin(0) + \sqrt{5}b\cos(0) + 0,4*0 &= 0 \\
\sqrt{5}b &= 0 \\
b &= 0
\end{aligned}$$

Die Lösung lautet

$$x(t) = 1,88\cos(\sqrt{5}t) + 0,1t^2 + 0,12$$

3. Die inhomogene Differentialgleichung lautet $2\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) - 10x(t) = t$. Es muss wieder zunächst die zugehörige homogene DGL ($2\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) - 10x(t) = 0$ gelöst werden. Wir wählen wieder den Ansatz mit $x(t) = e^{\lambda t}$ (Ableitungen wie oben).

$$\begin{aligned}
2\lambda^2 e^{\lambda t} + \lambda e^{\lambda t} - 10e^{\lambda t} &= 0 \\
2\lambda^2 + \lambda - 10 &= 0 \\
\lambda^2 + \frac{\lambda}{2} - 5 &= 0 \\
\lambda_{1,2} &= -0,25 \pm \sqrt{0,0625 + 5} \\
\lambda_{1,2} &= -0,25 \pm 2,25 \\
\lambda_1 &= 2 \\
\lambda_2 &= -2,5
\end{aligned}$$

Es ergibt sich als allgemeine Lösung

$$x(t) = ae^{2t} + be^{-2,5t}$$

Jetzt wird wieder eine Lösung für die inhomogene DGL geraten. Wir wählen als Ansatz $x(t) = ct + d$ ($\dot{x}(t) = ct$, $\ddot{x}(t) = 0$).

$$
\begin{aligned}
c - 10(ct + d) &= t \\
c - 10ct - 10d &= t \\
\Rightarrow -10ct &= t \\
c &= -0,1 \\
c - 10d &= 0 \\
-0,1 - 10d &= 0 \\
d &= -0,01
\end{aligned}
$$

Als allgemeine Lösung ergibt sich jetzt

$$
\begin{aligned}
x(t) &= ae^{2t} + be^{-2,5t} - 0,1t - 0,01 \\
\dot{x}(t) &= 2ae^{2t} - 2,5be^{-2,5t} - 0,1 \\
x(0) &= 2 \\
ae^0 + be^0 - 0,1 * 0 - 0,01 &= 2 \\
a + b - 0,01 &= 2 \\
a &= 1,99 - b \\
\dot{x}(0) &= 0 \\
2ae^0 - 2,5be^0 - 0,1 &= 0 \\
2a - 2,5b - 0,1 &= 0 \\
2(1,99 - b) - 2,5b &= 0,1 \\
-4,5b &= -3,88 \\
b &= 0,86 \\
a &= 1,13
\end{aligned}
$$

Die endgültige Lösung lautet

$$
x(t) = 1,13e^{2t} + 0,86e^{-2,5t} - 0,1t - 0,01
$$