Theoretische Physik für LAK 1: Übung 2

von
Naja v. Schmude (4127652), Gruppe: Montag

Aufgabe 1

1. Es ist die homogene Differentialgleichung $3\ddot{x}(t) + 4x(t) = 0$ zu lösen. Die Anfangsbedingungen sind als $x(0) = 0$ und $\dot{x}(t) = 1$ gegeben.
   Zur Lösung wird zunächst ein Ansatz gewählt:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\lambda t} \\ \dot{x}(t) &= \lambda e^{\lambda t} \\ \ddot{x}(t) &= \lambda^2 e^{\lambda t} \end{aligned}$$

   Damit folgt

$$\begin{aligned} 3\lambda^2 e^{\lambda t} + 4e^{\lambda t} &= 0 \\ 3\lambda^2 + 4 &= 0 \\ \lambda &= \pm\frac{2}{\sqrt{3}} i \end{aligned}$$

   Daraus folgt die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{\frac{2}{\sqrt{3}}it} + Be^{-\frac{2}{\sqrt{3}}it} \quad | \text{ Euler-Formel anwenden} \\ &= A\left(\cos\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right) + i\sin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right)\right) + B\left(\cos\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right) - i\sin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right)\right) \\ &= \underbrace{(A+B)}_{a}\cos\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right) + \underbrace{(A-B)i}_{b}\sin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right) \\ x(t) &= a\cos\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right) + b\sin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right) \\ \dot{x}(t) &= -\frac{2}{\sqrt{3}}a\sin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}b\cos\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right) \end{aligned}$$

   Durch Einsetzen der Anfangsbedingungen erhält man die Lösungen für a und b:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ a\cos(0) + b\sin(0) &= 0 \\ a &= 0 \\ \dot{x}(0) &= 1 \\ -\frac{2}{\sqrt{3}}a\sin(0) + \frac{2}{\sqrt{3}}b\cos(0) &= 1 \\ b &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Die Funktion lautet also

$$x(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{2}{\sqrt{3}} t\right)$$

Die Funktion sieht ungefähr so aus:

2. Nun ist die Differentialgleichung $\ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t) + 2x(t) = 0$ zu lösen. Die Anfangsbedingungen sind die selben und wir wählen als Ansatz ebenfalls $x(t) = e^{\lambda t}$ (mit den selben Ableitungen).

$$\begin{aligned}
\lambda^2 e^{\lambda t} - 2\lambda e^{\lambda t} + 3e^{\lambda t} &= 0 \\
\lambda^2 - 2\lambda + 3 &= 0 \\
\lambda_{1/2} &= 1 \pm \sqrt{1^2 - 3} \\
&= 1 \pm \sqrt{-2} \\
&= 1 \pm \sqrt{2} i
\end{aligned}$$

Es folgt nun die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned}
x(t) &= Ae^{(1+i\sqrt{2})t} + Be^{(1-i\sqrt{2})t} \\
&= Ae^t e^{i\sqrt{2}t} + Be^t e^{-i\sqrt{2}t} \\
&= e^t \left(Ae^{i\sqrt{2}t} + Be^{-i\sqrt{2}t}\right) \qquad | \text{ Euler-Formel anwenden} \\
&= e^t \left(A\left(\cos(\sqrt{2}t) + i\sin(\sqrt{2}t)\right) + B\left(\cos(\sqrt{2}t) - i\sin(\sqrt{2}t)\right)\right) \\
&= e^t \left(\underbrace{(A+B)}_{a}\cos(\sqrt{2}t) + \underbrace{(A-B)i}_{b}\sin(\sqrt{2}t)\right) \\
x(t) &= e^t \left(a\cos(\sqrt{2}t) + b\sin(\sqrt{2}t)\right) \\
\dot{x}(t) &= e^t \left(a\cos(\sqrt{2}t) + b\sin(\sqrt{2}t)\right) + e^t\left(-\sqrt{2}a\sin(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}tb\cos(\sqrt{2}t)\right) \\
&= e^t \left(a\cos(\sqrt{2}t) + b\sin(\sqrt{2}t) - \sqrt{2}a\sin(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}tb\cos(\sqrt{2}t)\right) \\
&= e^t \left((a+\sqrt{2}b)\cos(\sqrt{2}t) + (b-\sqrt{2}a)\sin(\sqrt{2}t)\right)
\end{aligned}$$

Jetzt werden wieder die Anfangsbedingungen eingesetzt um a und b zu ermitteln.

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ e^0(a\cos(0) + b\sin(0)) &= 0 \\ a &= 0 \\ \dot{x}(0) &= 1 \\ e^0\left((a+\sqrt{2}b)\cos(0) + (b-\sqrt{2}a)\sin(0)\right) &= 1 \\ \sqrt{2}b &= 1 \\ b &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Die Funktion lautet demnach

$$x(t) = e^t * \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)$$

Skizze:

Aufgabe 2

Die Drehung sei über $\vec{\omega} = (2,1,0)\tau^{-1}$ gegeben. Und $R = 2a_0$. Für $t = 0$ verschwindet der Markierungspunkt in der xy-Ebene, d.h. es gilt für $\vec{r_0} = (x_0, y_0, 0)$. Zunächst wird der Ortsvektor ausgerechnet. Dabei gilt, da es sich um eine Kreisbahn handelt, dass $x_0^2+y_0^2 = R^2$ (siehe Skizze). Zudem muss zu jedem Zeitpunkt t gelten, dass der Ortsvektor $\vec{r_t}$ senkrecht zur Drehachse, also $\vec{\omega}$ steht. Über diese beiden Informationen lässt sich nun $\vec{r_0}$ berechnen:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} * \vec{r_0} &= 0 \\ (2,1,0)\tau^{-1} * (x_0, y_0, 0) &= 0 \\ \frac{2x_0}{\tau} + \frac{y_0}{\tau} &= 0 \\ x_0 &= -\frac{1}{2}y_0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_0^2 + y_0^2 &= R^2 \\
\left(-\frac{1}{2}y_0\right)^2 + y_0^2 &= 4a_0^2 \\
\frac{1}{4}y_0^2 + y_0^2 &= 4a_0^2 \\
\frac{5}{4}y_0^2 &= 4a_0^2 \\
y_0^2 &= \frac{16}{5}a_0^2 \\
y_0 &= \pm\frac{4}{\sqrt{5}}a_0
\end{aligned}
$$

Wir einigen uns auf den positiven Wert von y_0 und erhalten damit als Ortsvektor

$$
\vec{r_0} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}a_0, \frac{4}{\sqrt{5}}a_0, 0\right)
$$

a) Es ist die Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Punkts zum Zeitpunkt $t = 0$ gesucht. Es gilt $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$$
\begin{aligned}
\vec{v} &= \vec{\omega} \times \vec{r_0} \\
&= (2,1,0)\tau^{-1} \times \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}a_0, \frac{4}{\sqrt{5}}a_0, 0\right) \quad \text{(Rechenweg wird ausgespart)} \\
&= (0,0,\frac{10}{\sqrt{5}}a_0)\tau^{-1}
\end{aligned}
$$

b) Es ist der Zeitpunkt t' gesucht, nach dem der Punkt genau eine halbe Umdrehung gemacht hat.
Wir betrachten nun die Strecke, die auf der Kreisbahn zurückgelegt wird. Allgemein gilt für Zeitpunkt t

$$
s(t) = s_0 + v * t
$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist noch keine Entfernung zurückgelegt worden, daher gilt $s_0 = 0$. Nach t' ist die Entfernung $s(t') = \pi * R = 2\pi a_0$ zurückgelegt worden. Die Geschwindigkeit ist konstant mit $v = |\vec{v}_0| = \frac{10}{\sqrt{5}}a_0\tau^{-1}$. Es folgt

$$
\begin{aligned}
s(t') &= v * t' \\
2\pi a_0 &= \frac{10}{\sqrt{5}}a_0\tau^{-1} * t' \\
t' &= \frac{2\sqrt{5}\pi}{10}\tau \\
t' &= \frac{\pi}{\sqrt{5}}\tau
\end{aligned}
$$

Zum Zeitpunkt $t' = \frac{\pi}{\sqrt{5}}\tau$ hat also der Punkt eine halbe Drehung mitgemacht.
Jetzt soll noch die Momentangeschwindigkeit $\vec{v}_{t'}$ berechnet werden. Wir wissen, dass der entsprechende Ortsvektor $\vec{r}_{t'}$ dem von $\vec{r}_0$ entspricht, jedoch mit entgegengesetzter Richtung.

$$
\vec{r}_{t'} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}a_0, -\frac{4}{\sqrt{5}}a_0, 0\right)
$$

Nun kann wieder das Kreuzprodukt berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{t'} &= \vec{\omega} \times \vec{r}_{t'} \\
&= (2,1,0)\tau^{-1} \times \left(\frac{2}{\sqrt{5}}a_0, -\frac{4}{\sqrt{5}}a_0, 0\right) \quad \text{(Rechenweg wird ausgespart)} \\
\vec{v}_{t'} &= (0,0,-\frac{10}{\sqrt{5}}a_0)\tau^{-1}
\end{aligned}$$

c) Die Frequenz des Oszillators wird über die Kreisfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ angegeben. Da die Kreisfrequenz der Winkelgeschwindigkeit entspricht, muss gelten

$$\begin{aligned}
|\vec{\omega}| &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\
\sqrt{2^2+1^2} &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\
\sqrt{5} &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\
5 &= \frac{k}{m}
\end{aligned}$$

Das Verhältnis von $k : m$ muss also 5 betragen. Eine Bewegungsgleichung eines Oszillators lautet z.B. $x(t) = C\sin(\frac{5}{t} + \alpha)$.