Theoretische Physik für LAK 1: Übung 10

von
Naja v. Schmude (4127652), Gruppe: Montag

Aufgabe 1

a) Es sind die Bewegungsgleichungen für die drei Massen aufzustellen. Dazu wählen wir den Ansatz nach Lagrange und stellen zunächst kinetische und potentielle Energien auf.

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{m}{2}\dot{z_1}^2 + \frac{m}{2}\dot{z_2}^2 + \frac{m}{2}\dot{z_3}^2 \\
V &= \frac{k}{2}(z_1 - z_2)^2 + \frac{k}{2}(z_2 - z_3)^2 = \frac{k}{2}(z_1^2 + 2z_2^2 + z_3^2 - 2z_1z_2 - 2z_2z_3) \\
L &= \frac{m}{2}\dot{z_1}^2 + \frac{m}{2}\dot{z_2}^2 + \frac{m}{2}\dot{z_3}^2 - \frac{k}{2}(z_1^2 + 2z_2^2 + z_3^2 - 2z_1z_2 - 2z_2z_3) \\
\frac{\partial L}{\partial z_1} &= -kz_1 + kz_2 \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{z_1}} &= m\dot{z_1} \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z_1}} &= m\ddot{z_1} \\
\frac{\partial L}{\partial z_2} &= -2kz_2 + kz_1 + kz_3 \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{z_2}} &= m\dot{z_2} \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z_2}} &= m\ddot{z_2} \\
\frac{\partial L}{\partial z_3} &= -kz_3 + kz_2 \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{z_3}} &= m\dot{z_3} \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z_3}} &= m\ddot{z_3}
\end{aligned}
$$

Die Bewegungsgleichungen ergeben sich nun aus $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z_i}} - \frac{\partial L}{\partial z_i} = 0$.

$$
\begin{aligned}
I.&\quad m\ddot{z_1} + kz_1 - kz_2 = 0 \\
II.&\quad m\ddot{z_2} + 2kz_2 - kz_1 - kz_3 = 0 \\
III.&\quad m\ddot{z_3} + kz_3 - kz_2 = 0
\end{aligned}
$$

b) Um die Eigenfrequenzen und die Verhältnisse der Amplituden zu bestimmen, müssen die Bewegungsgleichungen gelöst werden. Wir wählen dazu den gemeinsamen Ansatz $z_i(t) = A_i e^{\lambda t}$. Damit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
I.&\quad mA_1\lambda^2 e^{\lambda t} + kA_1 e^{\lambda t} - kA_2 e^{\lambda t} = 0 \\
II.&\quad mA_2\lambda^2 e^{\lambda t} + 2kA_2 e^{\lambda t} - kA_1 e^{\lambda t} - kA_3 e^{\lambda t} = 0 \\
III.&\quad mA_3\lambda^2 e^{\lambda t} + kA_3 e^{\lambda t} - kA_2 e^{\lambda t} = 0
\end{aligned}
$$

Wir wollen λ bestimmen. Dazu stellen wir das LGS als Matrix auf und berechnen die Determinante, welche dann gleich Null gesetzt wird.

$$\begin{pmatrix} m\lambda^2+k & -k & 0 \\ -k & m\lambda^2+2k & -k \\ 0 & -k & m\lambda^2+k \end{pmatrix} * (A_1, A_2, A_3) = 0$$

$$\begin{aligned}
(m\lambda^2+k)\left((m\lambda^2+2k)(m\lambda^2+k)-k^2\right)-(-k)\left(-k*(m\lambda^2+k)\right) &= 0\\
(m\lambda^2+k)(m^2\lambda^4+m\lambda^2k+2km\lambda^2+2k^2-k^2)-(k^2m\lambda^2+k^3) &= 0\\
(m\lambda^2+k)(m^2\lambda^4+3m\lambda^2k+k^2)-(k^2m\lambda^2+k^3) &= 0\\
m^3\lambda^6+3m^2\lambda^4k+m\lambda^2k^2+km^2\lambda^4+3m\lambda^2k^2+k^3-k^2m\lambda^2-k^3 &= 0\\
m^3\lambda^6+4m^2\lambda^4k+3m\lambda^2k^2 &= 0\\
\lambda^2(m^3\lambda^4+4m^2k\lambda^2+3mk^2) &= 0
\end{aligned}$$

Als eine Lösung für λ^2 ergibt sich unmittelbar $\lambda^2 = 0$. Die anderen beiden Ergebnisse bekommt man durch das Lösen der verbleibenden quadratischen Gleichung.

$$\begin{aligned}
0 &= \lambda^4 + \frac{4k}{m}\lambda^2 + \frac{3k^2}{m^2}\\
\lambda_{1,2}^2 &= -2\frac{k}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{2k}{m}\right)^2 - \frac{3k^2}{m^2}}\\
&= -2\frac{k}{m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{m^2}}\\
&= -2 \pm 1\frac{k}{m}
\end{aligned}$$

Aus diesen Lösungen für λ^2 folgen nun die Eigenfrequenzen, da $i\omega = \lambda$.

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= 0\\
\omega_2 &= \pm 1\\
\omega_3 &= \pm\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Durch einsetzen der Ergebnisse für λ^2 in die Bewegungsgleichungen ergeben sich folgende Verhältnisse: Für $\lambda^2 = 0$ folgt $A_1 = A_2 = A_3$. Für $\lambda^2 = -\frac{k}{m}$ ergibt sich $A_2 = 0$ und $A_2 = A_1 + A_3$ (also $A_1 = -A_3$. Für $\lambda^2 = -3\frac{k}{m}$ ergibt sich dann $-2A_1 = A_2$, $-2A_3 = A_2$.

c)

Aufgabe 2

a)

b) Die Wellengleichung ergibt sich mit den gegebenen Bedingungen zu

$$z(x,t) = 2cm \sin\left(\frac{\omega x}{\frac{5cm}{\pi s}}\right) * \sin(\omega t)$$

Wir bestimmen nun die 1., 2. und 3. Eigenmode:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{\pi c}{l} = \frac{\pi * \frac{5cm}{\pi s}}{5cm} = 1Hz\\
\omega_2 &= 2 * \frac{\pi c}{l} = 2Hz\\
\omega_3 &= 3 * \frac{\pi c}{l} = 3Hz
\end{aligned}$$

Bevor man zum Zeichnen kommt, kann man nun die Wellengleichung noch etwas vereinfachen. Sie lautet nun für die n-te Eigenmode

$$z(x,t) = 2cm \sin\left(\frac{n\pi x}{5cm}\right) * \sin(nHz * t)$$

c) Die niedrigste Eigenschwingung entspricht hier der Frequenz $\omega_1 = 1Hz$. Mit dem festen Ort $x = L/2$ ergibt sich dann also Wellengleichung

$$\begin{aligned} z(x = L/2, t) &= 2cm \sin\left(\frac{1Hz * \frac{5cm}{2}}{\frac{5cm}{\pi s}}\right) * \sin(1Hz * t) \\ &= 2cm \sin(\frac{\pi}{2}) * \sin(1Hz * t) = -2cm * \sin(1Hz * t) \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit an dieser Stelle ergibt sich dann als Ableitung.

$$\frac{dz(x = L/2, t)}{dt} = -2cm \cos(1Hz * t) * 1Hz = -2\cos(1Hz * t)\frac{cm}{s}$$