

Scientific Visualization

Übung 5

Naja von Schmiede
Lisa Dohmann

7/10

3. a) Wir transformieren die Funktion in die Haarbasis.

4	8	6	2	-2	-1	0	3	Abweichung zum Mittelwert
6		4		-1,5		1,5		-2 2 -0,5 -1,5
	5				0			1 -1,5
		2,5						2,5 ✓

Damit haben wir die transformierten Koeffizienten

$[2,5, 2,5, 1, -1,5, -2, 2, -0,5, -1,5]$ und können schreiben

$$f(x) = 2,5 \phi_0 + 2,5 \psi_0 + \psi_1 - 1,5 \psi_1^1 - 2 \psi_0^2 + 2 \psi_1^2 - 0,5 \psi_2^2 - 1,5 \psi_3^2$$

- b) Wir ~~normieren~~ ^{normieren} die Basisfunktionen und damit auch die Koeffizienten, damit uns der Betrag der Koeffizienten sagt, wie stark deren Einfluss ist.

$$\bar{\phi}_0 = \phi_0$$

$$\bar{\psi}_i = \psi_i / \|\psi_i\| \quad \text{mit } \|\psi_i\| = \sqrt{\langle \psi_i, \psi_i \rangle} = \sqrt{\int (\psi_i)^2} = \frac{1}{\sqrt{2^i}}$$

$$= \sqrt{2^i} \cdot \psi_i$$

Größeres $i \rightarrow$ größerer Einfluss?

Das heißt wir müssen alle unsere Koeffizienten mit $\left(\frac{1}{\sqrt{2^i}}\right)^2$ multiplizieren.

(genau so Koeffizienten)²

$$[2,5, 2,5, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1,5}{\sqrt{2}}, -1, 1, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}] \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int f(x)^2 dx}$$

Nun sortieren wir die Koeffizienten aufsteigend nach Betrag und streichen solange die kleinsten weg, bis der Fehlerwert überschritten wird.

Wir können $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $-\frac{3}{4}$ streichen.

ff
-2p

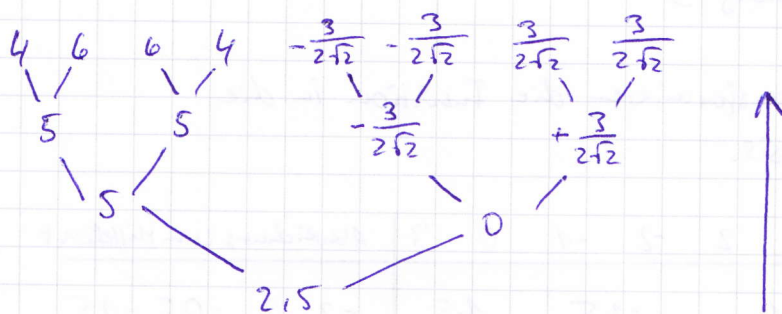
$$\begin{aligned} \text{Fehler: } \|f - \bar{f}\|^2 &= \sum_{i=1}^n c_i^2 = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{12^2} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \\ &= \frac{1}{16} + \frac{1}{12} + \frac{9}{16} = \frac{9}{8} < 2 \end{aligned}$$

Unsere komprimierte Funktion hat somit nur noch die Koeffizienten

$$[2,5, 2,5, 0, -\frac{3}{2\sqrt{2}}, -1, 1, 0, 0]$$

3/5

c) Nun kehren wir die Zerlegung um, um wieder Koeffizienten in der Pixelbasis zu erhalten.



$$\left[4, 6, 6, 4, -\frac{3}{2\sqrt{2}}, -\frac{3}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{2\sqrt{2}} \right] = \bar{f}$$

~~Auch die Normierung~~ Bevor wir nun den Fehler $\|f - \bar{f}\|^2$ berechnen, muss auch die Ausgangsfunktion normiert werden. Sie besteht aus den Basisfkt. von V^3

$$\{\phi_0^3, \phi_1^3, \dots, \phi_7^3\}$$

Die Normierung $\bar{\phi}_i^3$ ergibt sich wieder als

$$\bar{\phi}_i^3 = \sqrt{2^3} \phi_i^3 \quad \text{für } j=3: \sqrt{2^3} \cdot \phi_i^3 = 2\sqrt{2} \phi_i^3$$

Dadurch erhalten wir

$$\left[\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, 0, \frac{3}{2\sqrt{2}} \right] = f$$

$$\text{Fehler: } \|f - \bar{f}\|^2 = \langle f - \bar{f}, f - \bar{f} \rangle = \sum c_i \cdot c_j$$

$$\begin{aligned} &= \cancel{\left(\frac{2}{\sqrt{2}} - 4\right)^2} + \left(\frac{2}{\sqrt{2}} - 4\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{2}} - 6\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 6\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 4\right)^2 \\ &\quad + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{-3}{2\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2 \\ &= 6,69 + 10,11 + 15,04 + 10,84 \\ &\quad + 2 + 3,125 + 1,125 \\ &= 48,92 \end{aligned}$$

Aufgabe 10

Die Zellen werden jeweils als a_{ij} bezeichnet, wobei i den Index der Zeile angibt und j den der Spalte.

a) Der Boxfilter wird angewendet

$$a_{00} = \frac{9 \cdot 24}{9} = 24 \quad a_{10} = (6 \cdot 24 + 3 \cdot 12) / 9 = 20$$

$$a_{01} = 9 \cdot 24 / 9 = 24 \quad a_{11} = (7 \cdot 24 + 2 \cdot 12) / 9 = 21,3$$

$$a_{02} = 9 \cdot 24 / 9 = 24 \quad a_{12} = (8 \cdot 24 + 1 \cdot 12) / 9 = 22,6$$

$$a_{03} = 9 \cdot 24 / 9 = 24 \quad a_{13} = 9 \cdot 24 / 9 = 24$$

$$a_{20} = (3 \cdot 24 + 6 \cdot 12) / 9 = 16 \quad a_{20} = 9 \cdot 12 / 9 = 12$$

$$a_{21} = (5 \cdot 24 + 4 \cdot 12) / 9 = 18,6 \quad a_{21} = (6 \cdot 12 + 3 \cdot 24) / 9 = 16$$

$$a_{22} = (7 \cdot 24 + 2 \cdot 12) / 9 = 21,3 \quad a_{22} = (6 \cdot 24 + 3 \cdot 12) / 9 = 20$$

$$a_{23} = 9 \cdot 24 / 9 = 24 \quad a_{23} = 9 \cdot 24 / 9 = 24$$

24	24	24	24
20	21,3	22,6	24
16	18,6	21,3	24
12	16	20	24



b) Der Boxfilter soll erneut auf das Ergebnis von a) angewendet werden.

$$a_{00} = (7 \cdot 24 + 20 + 21,3) / 9 = 23,26$$

$$a_{01} = (6 \cdot 24 + 20 + 21,3 + 22,6) / 9 = 23,1$$

$$a_{02} = (7 \cdot 24 + 21,3 + 22,6) / 9 = 23,5$$

$$a_{03} = (8 \cdot 24 + 22,6) / 9 = 23,85$$

$$a_{10} = (4 \cdot 24 + 20 + 21,3 + 16 + 18,6 + 12) / 9 = 21,4$$

$$a_{11} = (3 \cdot 24 + 20 + 21,3 + 22,6 + 16 + 18,6 + 21,3) / 9 = 21,3$$

$$a_{12} = (5 \cdot 24 + 21,3 + 22,6 + 18,6 + 21,3) / 9 = 22,6$$

$$a_{13} = (7 \cdot 24 + 22,6 + 21,3) / 9 = 23,5$$

$$a_{20} = (24 + 3 \cdot 12 + 20 + 21,3 + 16 + 18,6 + 16) / 9 = 16,8$$

$$a_{21} = (20 + 21,3 + 22,6 + 2 \cdot 16 + 18,6 + 21,3 + 12 + 20) / 9 = 18,6$$

$$a_{22} = (21,3 + 22,6 + 3 \cdot 24 + 18,6 + 21,3 + 16 + 20) / 9 = 21,3$$

$$a_{23} = (6 \cdot 24 + 22,6 + 21,3 + 20) / 9 = 23,1$$

$$a_{30} = (6 \cdot 12 + 2 \cdot 16 + 18,6) / 9 = 13,63$$

$$a_{31} = (3 \cdot 12 + 2 \cdot 16 + 18,6 + 21,3 + 20 + 24) / 9 = 16,8$$

$$a_{32} = (4 \cdot 24 + 18,6 + 21,3 + 16 + 20 + 12) / 9 = 20,4$$

$$a_{33} = (7 \cdot 24 + 20 + 21,3) / 9 = 23,26$$

23,26	23,1	23,5	23,86
21,4	21,3	22,6	23,5
16,8	18,6	21,3	23,1
13,63	16,8	20,4	23,26



c) Der Dachfilter ist anzuwenden.

$$a_w = ((1+2+3+2+1) \cdot 24 + (2+4+6+4+2) \cdot 24 + (3+6+9+6+3) \cdot 24 + (2+4+6) \cdot 12 + (4+2) \cdot 24 + (1+2+3) \cdot 12 + (2+1) \cdot 24) / 81 = 21, \overline{3}$$

$$a_{01} = ((1+2+3+2+1) \cdot 24 + (2+4+6+4+2) \cdot 24 + (3+6+9+6+3) \cdot 24 + (2+4) \cdot 12 + (6+4+2) \cdot 24 + (1+2) \cdot 12 + (3+2+1) \cdot 24) / 81 = 22, \overline{6}$$

$$a_{10} = ((1+2+3+2+1) \cdot 24 + (2+4+6+4+2) \cdot 24 + (3+6+9) \cdot 12 + (6+3) \cdot 24 + (2+4+6) \cdot 12 + (4+2) \cdot 24 + (1+2+3) \cdot 12 + (2+1) \cdot 24) / 81 = 18, \overline{6}$$

$$a_{11} = ((1+2+3+2+1) \cdot 24 + (2+4+6+4+2) \cdot 24 + (3+6) \cdot 12 + (9+6+3) \cdot 24 + (2+4) \cdot 12 + (6+4+2) \cdot 24 + (1+2) \cdot 12 + (3+2+1) \cdot 24) / 81 = 21, \overline{3}$$

21, $\overline{3}$	22, $\overline{6}$
18, $\overline{6}$	21, $\overline{3}$



d) Es ist der Laplace-Filter anzuwenden.

$$a_w = (-4 \cdot 24 + 4 \cdot 24) / 8 = 0$$

$$a_{01} = (-4 \cdot 24 + 4 \cdot 24) / 8 = 0$$

$$a_{02} = (-4 \cdot 24 + 4 \cdot 24) / 8 = 0$$

$$a_{03} = (-4 \cdot 24 + 4 \cdot 24) / 8 = 0$$

$$a_{20} = (-24 - 3 \cdot 12 + 4 \cdot 12) / 8 = -\frac{3}{2}$$

$$a_{21} = (-2 \cdot 24 - 2 \cdot 12 + 4 \cdot 12) / 8 = -3$$

$$a_{22} = (-3 \cdot 24 - 12 + 4 \cdot 24) / 8 = \frac{3}{2}$$

$$a_{23} = (-4 \cdot 24 + 4 \cdot 24) / 8 = 0$$

$$a_{10} = (-2 \cdot 24 - 12 + 4 \cdot 24) / 8 = \frac{3}{2}$$

$$a_{11} = (-3 \cdot 24 - 12 + 4 \cdot 24) / 8 = \frac{3}{2}$$

$$a_{12} = (-4 \cdot 24 + 4 \cdot 24) / 8 = 0$$

$$a_{13} = (-4 \cdot 24 + 4 \cdot 24) / 8 = 0$$

$$a_{30} = (-4 \cdot 12 + 4 \cdot 12) / 8 = 0$$

$$a_{31} = (-3 \cdot 12 - 24 + 4 \cdot 12) / 8 = -\frac{3}{2}$$

$$a_{32} = (-3 \cdot 24 - 12 + 4 \cdot 24) / 8 = \frac{3}{2}$$

$$a_{33} = (-4 \cdot 24 + 4 \cdot 24) / 8 = 0$$

0	0	0	0
$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0
$-\frac{3}{2}$	-3	$\frac{3}{2}$	0
0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0



e) fehlt -1p

$\frac{4}{5}$