$\boxed{\text{Musterlösung Aufg. 1}}$

1)a) $C_0^0(t) = p_0 = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$, $C_1^0(t) = p_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $C_2^0(t) = p_2 = \begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix}$, $C_3^0(t) = p_3 = \begin{pmatrix}5\\2\\2\end{pmatrix}$

Berechne $C_0^3(t) = b(t)$:

$\rightsquigarrow C_0^1(t) = (1-t)\,C_0^0(t) + t\,C_1^0(t)$

$C_1^1(t) = (1-t)\,C_1^0(t) + t\,C_2^0(t)$

$C_2^1(t) = (1-t)\,C_2^0(t) + t\,C_3^0(t)$

$\rightsquigarrow C_0^2(t) = (1-t)\,C_0^1(t) + t\,C_1^1(t) = (1-t)\left[(1-t)C_0^0(t) + t\,C_1^0(t)\right] + t\left[(1-t)C_1^0(t) + t\,C_2^0(t)\right]$

$= (1-t)^2 C_0^0(t) + 2t(1-t)\,C_1^0(t) + t^2 C_2^0(t)$

$C_1^2(t) = (1-t)\,C_1^1(t) + t\,C_2^1(t) = (1-t)\left[(1-t)C_1^0(t) + t\,C_2^0(t)\right] + t\left[(1-t)C_2^0(t) + t\,C_3^0(t)\right]$

$= (1-t)^2 C_1^0(t) + 2t(1-t)\,C_2^0(t) + t^2 C_3^0(t)$

$\rightsquigarrow C_0^3(t) = (1-t)\,C_0^2(t) + t\,C_1^2(t)$

$= (1-t)\left[(1-t)^2 C_0^0(t) + 2t(1-t)\,C_1^0(t) + t^2 C_2^0(t)\right] + t\left[(1-t)^2 C_1^0(t) + 2t(1-t)\,C_2^0(t) + t^2 C_3^0(t)\right]$

$= (1-t)^3 C_0^0(t) + 3t(1-t)^2 C_1^0(t) + 3t^2(1-t)\,C_2^0(t) + t^3 C_3^0(t)$

$= (1 - 3t + 3t^2 - t^3)\,C_0^0(t) + 3(t - 2t^2 + t^3)\,C_1^0(t) + 3(t^2 - t^3)\,C_2^0(t) + t^3 C_3^0(t)$

$= C_0^0(t) - 3t\,C_0^0(t) + 3t\,C_1^0(t) + 3t^2 C_0^0(t) - 6t^2 C_1^0(t) + 3t^2 C_2^0(t) - t^3 C_0^0(t) + 3t^3 C_1^0(t) - 3t^3 C_2^0(t) + t^3 C_3^0(t)$

$$= \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-3+3\\-9+0\\0+6\end{pmatrix} + t^2\begin{pmatrix}3-6+12\\9+0+0\\0-12+12\end{pmatrix} + t^3\begin{pmatrix}-1+3-12+5\\-3+0+0+2\\0+6-12+2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\-9\\6\end{pmatrix} + t^2\begin{pmatrix}9\\9\\0\end{pmatrix} + t^3\begin{pmatrix}-5\\-1\\-4\end{pmatrix}$$

b)

$$b\left(\tfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix}1 + 0 + 9/4 - 5/8\\3 - 9/2 + 9/4 - 1/8\\0 + 3 + 0 - 1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21/8\\5/8\\5/2\end{pmatrix}$$

c)

$$b'(t) = \begin{pmatrix}0\\-9\\6\end{pmatrix} + 2t\begin{pmatrix}9\\9\\0\end{pmatrix} + 3t^2\begin{pmatrix}-5\\-1\\-4\end{pmatrix} \rightsquigarrow b'\left(\tfrac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix}0 + 9 - \frac{15}{4}\\-9 + 9 - 3/4\\6 + 0 - 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21/4\\-3/4\\3\end{pmatrix}$$

d)

$$T = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\-3 & 3 & 0 & 0\\3 & -6 & 3 & 0\\-1 & 3 & -3 & 1\end{pmatrix} \rightsquigarrow T^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\1 & 1/3 & 0 & 0\\1 & 2/3 & 1/3 & 0\\1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$T^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\9\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\4\\5\end{pmatrix};\quad T^{-1}\cdot\begin{pmatrix}3\\-9\\9\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\\2\end{pmatrix};\quad T^{-1}\cdot\begin{pmatrix}0\\6\\0\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\4\\2\end{pmatrix}$$

Die zurücktransformierten Punkte stimmen wie erwartet mit den Ausgangspunkten überein