Abgabe in der Vorlesung am 23.11.2010

Aufgabe 7 : Homogene Koordinaten

Gegeben sei ein Würfel mit Eckpunkten $v_0 = (0,0,1)$, $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (1,1,1)$, $v_4 = (0,0,2)$, $v_5 = (1,0,2)$, $v_6 = (0,1,2)$, $v_7 = (1,1,2)$. Folgende Transformationen sollen nacheinander und in dieser Reihenfolge angewendet werden:

- Rotation bezüglich des Würfelmittelpunktes um die x-Achse und um einen Winkel von $\pi/3$.
- Parallelprojektion in die x/y- Ebene.

(a) Berechne die einzelnen Transformationsmatritzen in homogenen Koordinaten.
(b) Berechne die Transformationsmatrix der gesamten Transformation.
(c) Berechne die Positionen der transformierten Eckpunkte des Würfels.
(d) Zeichne den projizierten Würfel in der x/y- Ebene.

Aufgabe 8 : Garland Heckbert Algorithmus

Der Algorithmus von Garland & Heckbert ordnet einer Kante (p_1, p_2) mit Endpunkten $p_1 = (1,-1,0)$ und $p_2 = (3,1,0)$ die durch die Matrix

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline b^T & c \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & -2 & -8 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 6 & -8 & 2 & 14 \end{pmatrix}, \text{ mit } A \in \mathbb{R}^{3\times 3}, b \in \mathbb{R}^3, c \in \mathbb{R}$$

gegebene Quadrik $v^T Q v$ zu. Den minimierenden Punkt v_* erhält man für invertierbare A durch $v_* = -A^{-1}b$. In diesem Fall ist A jedoch singulär und die Formel für v_* kann nicht angewandt werden.
(a) Zeige, dass A singulär ist.
(b) Im Falle singulärer Matrizen wird der Suchbereich für v_* auf die Kante eingeschränkt. Bestimme den Punkt v_*, der auf der Geraden durch p_1 und p_2 liegt und den Fehler $\binom{v_*}{1}^T Q \binom{v_*}{1}$ minimiert.

Tipp: Beschreibe den Punkt v_* durch den Ansatz $v_* = v(\lambda_*)$, wobei $v(\lambda) = (1-\lambda)p_1 + \lambda p_2$ gilt. Berechne den optimalen Wert für λ_*.