Tutor: Max

22.11.10

Scientific Visualization
Übung 04

Naja von Schmude
Lisa Dohrmann

10/10

Aufgabe 7:

a) Rotation um den Würfelmittelpunkt (x-Achse)

Zuerst verschieben wir den Mittelpunkt in den Ursprung (T1), dann rotieren wir um $\frac{\pi}{3}$ (R1) und verschieben den Würfel wieder zurück (T2). ✓

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ✓, \quad R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ✓$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ✓$$

Insgesamt ergibt sich für die Rotation R

$$R = T_2 \cdot R_1 \cdot T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{3}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 1/2 & -\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ✓$$

Anschließend wird auf die x/y-Ebene projeziert

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ✓$$

b) Die Transformationsmatrix T ergibt sich nun wie folgt

$$T = P \cdot R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{3}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ✓$$

c) Position der transformierten Eckpunkte:

$$V_0 : T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark \qquad V_4 : T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$V_1 : T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark \qquad V_5 : T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$V_2 : T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{3}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark \qquad V_6 : T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{3}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$V_3 : T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{3}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark \qquad V_7 : T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{3}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

d) Wir zeichnen die Punkte:

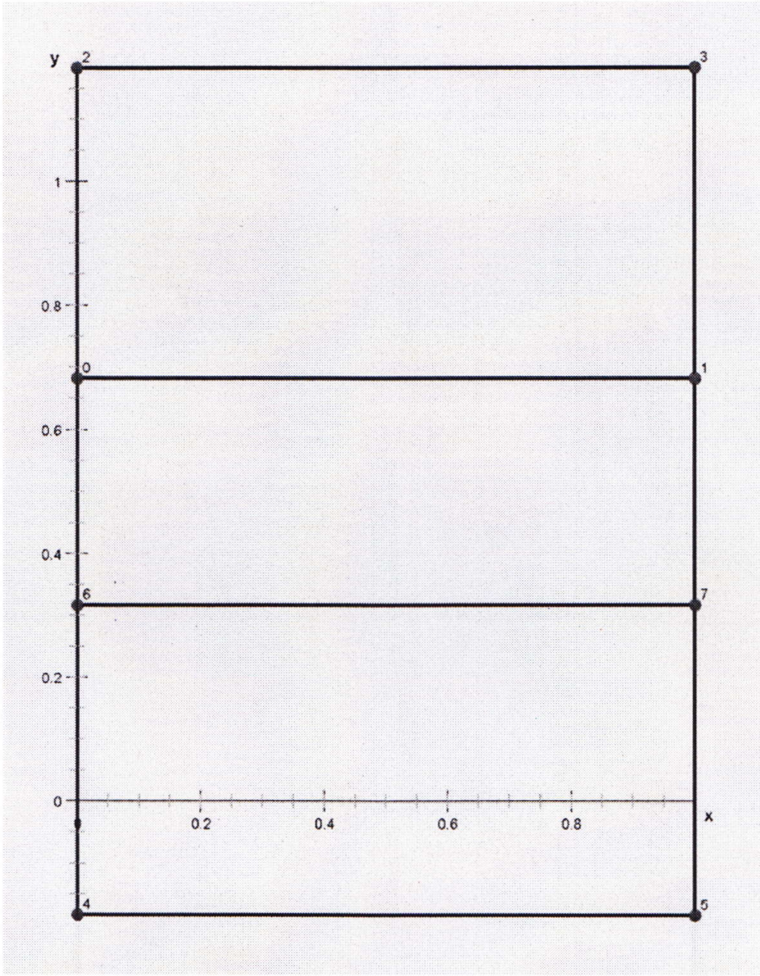
$$V_0' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}683 \end{pmatrix} \qquad V_4' = \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}18 \end{pmatrix}$$

$$V_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}683 \end{pmatrix} \qquad V_5' = \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}18 \end{pmatrix}$$

$$V_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}183 \end{pmatrix} \qquad V_6' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}317 \end{pmatrix}$$

$$V_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}183 \end{pmatrix} \qquad V_7' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}317 \end{pmatrix}$$

Transformierter Würfel:



✓

5/5

8. b) $\begin{pmatrix} v_* \\ 1 \end{pmatrix}^T Q \begin{pmatrix} v_* \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(\lambda) \\ 1 \end{pmatrix}^T Q \begin{pmatrix} v(\lambda) \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} (1-\lambda)p_1 + \lambda p_2 \\ 1 \end{pmatrix}^T Q \begin{pmatrix} (1-\lambda)p_1 + \lambda p_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\lambda)+3\lambda \\ -(1-\lambda)+\lambda \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T Q \begin{pmatrix} (1-\lambda)+3\lambda \\ -(1-\lambda)+\lambda \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+2\lambda \\ -1+2\lambda \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & -2 & -8 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 6 & -8 & 2 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+2\lambda \\ -1+2\lambda \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+2\lambda \\ -1+2\lambda \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 3+6\lambda-3+6\lambda+6 \\ 3+6\lambda-5+10\lambda-8 \\ 2-4\lambda+2 \\ 6+12\lambda+8-16\lambda+14 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+2\lambda \\ -1+2\lambda \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 12\lambda+6 \\ 16\lambda-10 \\ -4\lambda+4 \\ -4\lambda+28 \end{pmatrix} = 12\lambda + 6 + 24\lambda^2 + 12\lambda - 16\lambda + 10 + 32\lambda^2 - 20\lambda - 4\lambda + 28$$

$$= 56\lambda^2 - 16\lambda + 44$$

Das minimieren wir, indem wir die Ableitung bilden und diese gleich Null setzen.

$$p(\lambda) = 56\lambda^2 - 16\lambda + 44$$

$$\frac{\partial p}{\partial \lambda}(\lambda) = 112\lambda - 16 \quad \Rightarrow \quad v_* = \begin{pmatrix} (1-\frac{1}{7}) + \frac{1}{7}\cdot 3 \\ -(1-\frac{1}{7}) + \frac{1}{7} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$112\lambda - 16 \overset{!}{=} 0 \qquad\qquad = \begin{pmatrix} 9/7 \\ -5/7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \frac{16}{112} = \underline{\underline{\frac{1}{7}}}$$

a) Eine Matrix ist singulär, d.h. nicht invertierbar, wenn ihre Determinante gleich Null ist.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det A \overset{!}{=} 0$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (3\cdot 5\cdot 2) + (3\cdot(-2)\cdot 0) + (0\cdot 3\cdot(-2)) - (0\cdot 5\cdot 0) - (3\cdot 3\cdot 2) - (3\cdot(-2)\cdot(-2))$$

$$= 30 - 18 - 12 = \underline{\underline{0}}$$

5/5