Aufgabe 9

a) Die Pixelbasis $\{\phi_i^3\}_{i=0}^{7}$ hat die Gestalt $\{f_i \mid f_i = \mathbb{1}_{[\frac{i}{8},\frac{i+1}{8})}, i=0,\dots,7\}$.

Die (nicht-normierte) Haar-Basis von $V^0 \oplus W^0 \oplus W^1 \oplus W^2$ ist

$$\{\underbrace{\phi_0^0}_{V^0}, \underbrace{\Psi_0^0}_{W^0}, \underbrace{\Psi_0^1, \Psi_1^1}_{W^1}, \underbrace{\Psi_0^2, \Psi_1^2, \Psi_2^2, \Psi_3^2}_{W^2}\}.$$

$f := [4, 8, 6, 2, -2, -1, 0, 3]$ in Pixelbasis

$$-2\Psi_0^2 \qquad 2\Psi_1^2 \qquad -\frac{1}{2}\Psi_2^2 \qquad -\frac{3}{2}\Psi_3^2 \qquad \leftarrow W^2$$

$$6 \qquad 4 \qquad -\frac{3}{2} \qquad \frac{3}{2}$$

$$1\cdot\Psi_0^1 \qquad -\frac{3}{2}\Psi_1^1 \qquad \leftarrow W^1$$

$$5 \qquad 0$$

$$\frac{5}{2}\Psi_0^0 \qquad \leftarrow W^0$$

$$\frac{5}{2} \qquad \leftarrow V^0$$

$\Rightarrow f$ ist in der Haarbasis

$$\frac{5}{2}\phi_0^0 + \frac{5}{2}\Psi_0^0 + 1\cdot\Psi_0^1 - \frac{3}{2}\Psi_1^1 - 2\Psi_0^2 + 2\Psi_1^2 - \frac{1}{2}\Psi_2^2 - \frac{3}{2}\Psi_3^2,$$

kurz

$[\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1, -\frac{3}{2}, -2, 2, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}]$ in Haarbasis.

Normierung: $\overline{\Psi}_i^j := \sqrt{2^j}\,\Psi_i^j$ bringt

$[\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{2\sqrt{2}}, -1, 1, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}] = f$ in normierter Haarbasis.

b) Ordne die Koeffizienten absteigend nach Beträgen

$$|\tfrac{5}{2}| = |\tfrac{5}{2}| > |-\tfrac{3}{2\sqrt{2}}| > |-1| = |1| > |-\tfrac{3}{4}| > |\tfrac{1}{\sqrt{2}}| > |-\tfrac{1}{4}|.$$

Durch Auslassen der kleinsten 5 Koeffizienten erhalte

$$\|f - \hat{f}\| = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2} + \frac{9}{16} + 1 + 1} = \sqrt{\frac{50}{16}} = \frac{5}{\sqrt{8}} < 2, \text{ mit}$$

$$\hat{f} = \frac{5}{2}\phi_0^0 + \frac{5}{2}\Psi_0^0 - \frac{3}{2\sqrt{2}}\overline{\Psi}_1^1 \;\hat{=}\; [\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0, -\frac{3}{2\sqrt{2}}, 0, 0, 0, 0]$$ in normierter Haarbasis.

c) Umrechnung in nicht-normierte Haarbasis: $\bar{\Psi}_0^1 = \sqrt{2}\, \Psi_0^1$, also

$$\hat{f} = \left[\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, 0, 0, 0, 0\right]$$ in unnormierter Haarbasis.

Somit

$$\begin{array}{cccc} & \frac{5}{2}\phi_0^0 & & \\ & + \frac{5}{2}\Psi_0^0 \; - & & \\ & \overbrace{\hspace{6em}}^{} & & \\ 5 & & 0 & \\ + \; 0\,\Psi_0^1 \; - & & + -\frac{3}{2}\Psi_1^1 \; - & \\ \overbrace{\hspace{4em}}^{} & & \overbrace{\hspace{4em}}^{} & \\ 5 \qquad 5 & & -\frac{3}{2} \qquad \frac{3}{2} & \end{array}$$

$$\Rightarrow \hat{f} = \left[5, 5, 5, 5, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$$ in Pixelbasis.

Damit ist

$$\|f - \hat{f}\| = \frac{1}{\sqrt{8}}\left[(4-5)^2 + (8-5)^2 + (6-5)^2 + (2-5)^2 + \left(-2+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-1+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(3-\frac{3}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

weil $\|\phi_i^3\| = \sqrt{8}$

$$= \frac{1}{\sqrt{8}}\left[1+9+1+9+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+\frac{9}{4}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \sqrt{\frac{100}{4}} = \frac{5}{\sqrt{8}}.$$

Der L^2-Fehler ist derselbe wie unter b, wie zu erwarten war.