Tutor: Max 13.12.10

Scientific Visualization
Übung 7

Naja von Schmude
Lisa Dohrmann

10/10

(13) Wir zeigen, wie man von Formel (2) zu Formel (1) kommt. Dazu überlegen wir uns zuerst, was die beiden Summen in (2) sind ($\sum_{i=1}^{n} \bar{q}_i^k$ und $\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i^k$). Im Folgenden stehe $\sum$ immer für $\sum_{i=1}^{n}$.

$\sum \bar{q}_i^k$ ist die Summe aller Flächenmittelpunkte, ein Flächenmittelpunkt berechnet sich aus allen $\underbrace{\text{Punkten}}_{\text{Eck-}}$ der Fläche:

$$\sum \bar{q}_i^k = \frac{1}{4}\left(n \cdot p^{k-1} + \sum q_i^{k-1} + 2\sum p_i^{k-1}\right)$$

$$= \frac{1}{4} n p^{k-1} + \frac{1}{4}\sum q_i^{k-1} + \frac{1}{2}\sum p_i^{k-1} \qquad (*)$$

$\sum \bar{p}_i^k$ ist die Summe der Punkte, die für jede Kante neu berechnet werden. Ein solcher Punkt wird aus den Eckpunkten der Kante und den Flächenmittelpunkten der beiden benachbarten Flächen gebildet.

$$\sum \bar{p}_i^k = \frac{1}{4}\left(n \cdot p^{k-1} + 2\sum \bar{q}_i^k + \sum p_i^{k-1}\right)$$

Für $\sum \bar{q}_i^k$ kann wiederum $(*)$ eingesetzt werden.

$$\sum \bar{p}_i^k = \frac{1}{4}\left(n \cdot p^{k-1} + 2\left(\frac{1}{4} n p^{k-1} + \frac{1}{4}\sum q_i^{k-1} + \frac{1}{2}\sum p_i^{k-1}\right) + \sum p_i^{k-1}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(n p^{k-1} + \frac{1}{2} n p^{k-1} + \frac{1}{2}\sum q_i^{k-1} + \sum p_i^{k-1} + \sum p_i^{k-1}\right)$$

$$= \frac{3}{8} n p^{k-1} + \frac{1}{2}\sum p_i^{k-1} + \frac{1}{8}\sum q_i^{k-1} \qquad (**)$$

Nun können wir $(*)$ und $(**)$ in Formel (2) einsetzen.

→

$$p_k = (1-n\alpha-n\beta)\,p^{k-1} + \alpha\tfrac{3}{8}np^{k-1} + \alpha\tfrac{1}{2}\sum p_i^{k-1} + \alpha\tfrac{1}{8}\sum q_i^{k-1}$$
$$+ \beta\tfrac{1}{4}np^{k-1} + \beta\tfrac{1}{2}\sum p_i^{k-1} + \beta\tfrac{1}{4}\sum q_i^{k-1}$$
$$= \left(1-n\alpha-n\beta+\tfrac{3}{8}\alpha n+\tfrac{1}{4}\beta n\right)p^{k-1} + \left(\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2}\beta\right)\sum p^{k-1} + \left(\tfrac{1}{8}\alpha+\tfrac{1}{4}\beta\right)\sum q_i^{k-1}$$

Nun setzen wir $\alpha = 4\gamma - 8\delta$ und $\beta = -2\gamma + 8\delta$ ein:

$$p_k = \left(1-4\gamma n+8\delta n + 2\gamma n - 8\delta n + \tfrac{3}{2}\gamma n - 3\delta n - \tfrac{1}{2}\gamma n + 2\delta n\right)p^{k-1}$$
$$+ (2\gamma - 4\delta - \gamma + 4\delta)\sum p_i^{k-1} + \left(\tfrac{1}{2}\gamma - \delta - \tfrac{1}{2}\gamma + 2\delta\right)\sum q_i^{k-1}$$
$$= (1-2\gamma n+\gamma n-\delta n)\,p^{k-1} + \gamma\sum p_i^{k-1} + \delta\sum q_i^{k-1}$$
$$= (1-\gamma n-\delta n)\,p^{k-1} + \gamma\sum p_i^{k-1} + \delta\sum q_i^{k-1} \qquad \square$$

Sehr schön!

5/5