Aufgabe 11

a) $\gamma_0 = p = (0,0)^T$ nach Def.

Expliziter Euler: $\gamma_{i+1} + h \circ v(\gamma_i)$, also

$$\gamma_1 = \gamma_0 + h \cdot v(\gamma_0) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}2\\1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$$

$$\gamma_2 = \gamma_1 + h \cdot v(\gamma_1) = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}1/2\\3/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$$

$$\gamma_3 = \gamma_2 + h \cdot v(\gamma_2) = \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}-3/2\\1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$$

$$\gamma_4 = \gamma_3 + h \cdot v(\gamma_3) = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}-1/2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}.$$

$v(\gamma_i)$ kann jeweils aus der Tabelle abgelesen werden.

b) $\sigma_0 = p = (0,0)^T$ nach Def.

Das in der Vorlesung besprochene Runge-Kutta-Verfahren lautet

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i + h \cdot v_i \quad \text{mit} \quad v_i = \frac{1}{6}\left(v^1 + 2v^2 + 2v^3 + v^4\right)$$

und $v_i^1 = v(\sigma_i)$, $\quad v_i^2 = v(\sigma_i + \frac{h}{2} v^1)$

$v_i^3 = v(\sigma_i + \frac{h}{2} v^2)$, $\quad v_i^4 = v(\sigma_i + h v^3)$.

Durch Verwendung der Boxbasis ergibt sich für jeden Ort mit Position nicht in $\mathbb{Z}^2$ für das Vektorfeld der gleiche Vektor wie für den auf $\mathbb{Z}^2$ abgerundeten Ort.

Man erhält:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + 2\cdot\frac{1}{6}\left[v\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) + 2\cdot v\left(\begin{pmatrix}2\\1/2\end{pmatrix}\right) + 2\cdot v\left(\begin{pmatrix}3/4\\0\end{pmatrix}\right) + v\left(\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\right)\right]$$

$$= \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix}2\\1/2\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}3/4\\0\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}2\\1/2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1/2\\3/2\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix}8/3\\1\end{pmatrix} + 2\cdot\frac{1}{6}\left[v\left(\begin{pmatrix}2\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}\right) + 2v\left(\begin{pmatrix}3\frac{2}{3}\\2\end{pmatrix}\right) + 2v\left(\begin{pmatrix}4\frac{2}{3}\\2\end{pmatrix}\right) + v\left(\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}\right)\right]$$

$$= \begin{pmatrix}8/3\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix}8/3\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}\frac{16}{3}\\\frac{15}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}40/9\\21/6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\frac{4}{9}\\3\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

c) $$I(\gamma_2) = \frac{1}{2L+1}\sum_{i=0}^{4} T(\gamma_i) = \frac{1}{5}(1+3+0+2+0) = \frac{6}{5}$$

d) $$I(\sigma_1) = \frac{1}{2L+1}\sum_{i=0}^{2} T(\sigma_i) = \frac{1}{3}(1+2+3) = 2$$