Abgabe in der Vorlesung am 01.02.2011

Aufgabe 19 : Diskrete Federenergie

Die diskrete Federenergie kann gegeben werden als

$$E_F(p) = \frac{1}{4} \sum_{p_i \in K^{(0)}} \sum_{p_j \in \operatorname{star} p_i} ||p_i - p_j||^2 ,$$

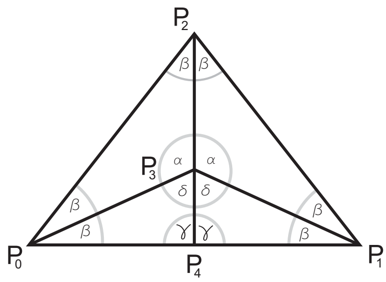
wobei K ein Simplizialkomplex ist und $p = (p_1, ..., p_n)^T$ die n Ecken von K beschreibt.

(a) Berechne die erste und zweite Ableitung von E_F.

(b) Zeichne den geschlossenen Polygonzug $p_0 = (0, 1)^T$, $p_1 = (2, 2)^T$, $p_2 = (3, 0)^T$, $p_3 = (1, -1)^T$ und die Gradienten der zugehörigen Energiefunktion.

Aufgabe 20 : Dirichlet-Energie

Gegeben ist die dargestellte Triangulierung mit $\alpha = 120°, \beta = 30°, \gamma = 90°, \delta = 60°$. Ferner sei eine Funktion $u \in S_h$ definiert durch $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 3$, $u_3 = 1/2$ und $u_4 = 1/3$.



(a)

(a) Berechne die Steifigkeitsmatrix L. Die Einträge von L berechnen sich:

$$L_{ij} = -\cot(\gamma_{ij}) - \cot(\gamma_{ji})), \quad i \neq j,$$

$$L_{ii} = - \sum_{P_j \in \operatorname{star}(P_i)} L_{ij},$$

wobei γ_{ij} und γ_{ji} die zwei Winkel gegenüber der Kante (P_i, P_j) bezeichnen.

(b) Berechne die Dirichlet-Energie der oben definierten Funktion u,

$$E_D(u) = \frac{1}{2} \int_M \langle \nabla u, \nabla u \rangle \, dA = \frac{1}{4} \ \vec{u}^T L \vec{u}.$$