Aufgabe 8

a) Zu zeigen: $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ ist singulär.

Eine Matrix ist singulär, also nicht invertierbar, wenn die Determinante gleich null ist.

$$\det A \overset{!}{=} 0$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (3\cdot 5\cdot 2) + (3\cdot(-2)\cdot 0) + (0\cdot 3\cdot(-2)) - (0\cdot 5\cdot 0) - (3\cdot 3\cdot 2) - (3\cdot(-2)\cdot(-2))$$

$$= 30 - 18 - 12 = \underline{\underline{0}}$$

$\square$

b) Es ist der Punkt $v_* = v(\lambda_*) = (1-\lambda_*)p_1 + \lambda_* p_2$ gesucht, der den Fehler $\begin{pmatrix} v_* \\ 1 \end{pmatrix}^T Q \begin{pmatrix} v_* \\ 1 \end{pmatrix}$ minimiert.

$$\begin{pmatrix} v_* \\ 1 \end{pmatrix}^T Q \begin{pmatrix} v_* \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\lambda_*)p_1 + \lambda_* p_2 \\ 1 \end{pmatrix}^T Q \begin{pmatrix} (1-\lambda_*)p_1 + \lambda_* p_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1-\lambda_*)p_1 \\ 1 \end{pmatrix}^T Q \begin{pmatrix} (1-\lambda_*)p_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_* p_2 \\ 1 \end{pmatrix}^T Q \begin{pmatrix} \lambda_* p_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-\lambda_* \\ -1+\lambda_* \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & -2 & -8 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 6 & -8 & 2 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\lambda_* \\ -1+\lambda_* \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\lambda_* \\ \lambda_* \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & -2 & -8 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 6 & -8 & 2 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\lambda_* \\ \lambda_* \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -2+2\lambda_*-8 & 2-2\lambda_*+2 & 14-14\lambda_*+14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\lambda_* \\ -1+\lambda_* \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 12\lambda_*+6 & 14\lambda_*-8 & -2\lambda_*+2 & 10\lambda_*+14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\lambda_* \\ \lambda_* \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 2\lambda_*-10 & 4-2\lambda_* & 28-14\lambda_* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\lambda_* \\ -1+\lambda_* \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12\lambda_*+6 & 14\lambda_*-8 & -2\lambda_*+2 & 10\lambda_*+14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\lambda_* \\ \lambda_* \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 6 - 6\lambda_* - 2\lambda_* + 2\lambda_*^2 + 10 - 10\lambda_* + 28 - 14\lambda_* + 36\lambda_*^2 + 18\lambda_* + 14\lambda_*^2 - 8\lambda_* + 10\lambda_* + 14$$

$$= 52\lambda_*^2 - 12\lambda_* + 58$$

Dieses Fehlermaß muss jetzt minimiert werden. Dazu leiten wir unser Ergebnis einmal ab und bestimmen dort die Nullstelle.

$$f(\lambda_*) = \begin{pmatrix} v_* \\ 1 \end{pmatrix}^T Q \begin{pmatrix} v_* \\ 1 \end{pmatrix} = 52\lambda_*^2 - 12\lambda_* + 58$$

$$f'(\lambda_*) = 104\lambda_* - 12$$

$$0 \stackrel{!}{=} 104\lambda_* - 12$$

$$\underline{\underline{\lambda_* = \frac{12}{104} = \frac{3}{26}}}$$

Damit ist $v_* = \left(1 - \frac{3}{26}\right) p_1 + \frac{3}{26} p_2 = \frac{23}{26}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{26}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16/13 \\ 20/23 \\ 0 \end{pmatrix}$