

1. Aufgabe

Für die Geschwindigkeit gilt bekanntlich $v(t) = a * t + v_0$. Jetzt ist zwar die Beschleunigung keine Konstante, aber funktioniert trotzdem genauso:

$$v(t) = \left(0,3 \frac{m}{s^2} + 0,25 \frac{m}{s^3} * t\right) * t + 20 \frac{km}{h} = \left(0,3 \frac{m}{s^2} + 0,25 \frac{m}{s^3} * t\right) * t + \frac{50}{9} \frac{m}{s}$$

Wir wollen t für die Geschwindigkeit von $40 \frac{km}{h} = \frac{100}{9} \frac{m}{s}$ bestimmen:

$$\frac{100}{9} \frac{m}{s} = \left(0,3 \frac{m}{s^2} + 0,25 \frac{m}{s^3} * t\right) * t + \frac{50}{9} \frac{m}{s}$$

$$\frac{100}{9} \frac{m}{s} = 0,3 \frac{m}{s^2} t + 0,25 \frac{m}{s^3} * t^2 + \frac{50}{9} \frac{m}{s}$$

$$0 = 0,3 \frac{m}{s^2} t + 0,25 \frac{m}{s^3} * t^2 - \frac{50}{9} \frac{m}{s}$$

$$= t^2 + 1,2 s * t - \frac{200}{9} s^2$$

Es kann die p-q-Formel angewandt werden.

$$t_{1,2} = \frac{-1,2s}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1,2s}{2}\right)^2 + \frac{200}{9} s^2}$$

$$= -0,6s \pm \sqrt{0,36s^2 + \frac{200}{9} s^2}$$

$$= -0,6s \pm 4,752s$$

$$t_1 = 4,152s$$

$$(t_2 = -5,352s \quad \text{es gibt keine negative Zeit, darum fällt der Wert raus})$$

Nach 4,15 Sekunden hat also die Straßenbahn von 20km/h auf 40 km/h beschleunigt. Jetzt wird noch die in dieser Zeit zurückgelegte Strecke berechnet. Dies geschieht mit der Formel

$$s(t) = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t$$

$$s(t) = \frac{1}{2} \left(0,3 \frac{m}{s^2} + 0,25 \frac{m}{s^3} * t\right) * t^2 + \frac{50}{9} \frac{m}{s} * t$$

$$s(4,152s) = \frac{1}{2} \left(0,3 \frac{m}{s^2} + 0,25 \frac{m}{s^3} * 4,152s\right) * (4,152s)^2 + \frac{50}{9} \frac{m}{s} * 4,152s$$

$$s(4,152s) = 34,600m$$

Nach 4,15 Sekunden legte die Straßenbahn also 34,6m zurück.

2. Aufgabe

Man kann die Aufgabe so betrachten, dass es sich um eine Bewegung in zwei Dimensionen handelt, nämlich einmal in y Richtung entlang der Strömung und einmal in x -Richtung zum anderen Ufer. Demnach ergeben sich folgende Gleichungen:

$$s_x(t) = v_x * t = 2 \frac{km}{h} * t = 0,5556 \frac{m}{s} t$$

$$s_y(t) = v_y * t = 1,5 \frac{km}{h} * t = 0,4167 \frac{m}{s} t$$

Zusätzlich ist die Breite des Flusses bekannt und somit ist $s_x = 20m$. Man kann hieraus auch schon gleich die Zeit berechnen, die man in x -Richtung benötigt:

$$20m = 0,5556 \frac{m}{s} * t_x$$

$$t_x = 36s$$

a) Wenn man etwas stromaufwärts schwimmt, dann entspricht das dem, wenn man erst 20m geradeaus schwimmt, und dann zurück gegen den Strom. Die Strecke in x -Richtung ist ja schon bekannt, aber wie weit muss man zurückschwimmen (man wird ja durch die Strömung abgetrieben) und wie schnell ist man dann? Wie für die Wurfgleichung wird $s_x(t)$ nach t umgestellt und in $s_y(t)$ eingesetzt:

$$y(x) = 0,4167 \frac{m}{s} * \frac{x}{0,5556 \frac{m}{s}}$$

Wie erwähnt, ist x schon bekannt:

$$y(20m) = 0,4167 \frac{m}{s} * \frac{20m}{0,5556 \frac{m}{s}} = 15m$$

Man muss also 15m zurückschwimmen. Da man aber gegen den Strom schwimmt, schwimmt man nicht mehr mit $2 \frac{km}{h}$ sondern mit einer Geschwindigkeit $v_y = 2 \frac{km}{h} - 1,5 \frac{km}{h} = 0,5 \frac{km}{h} = 0,1389 \frac{m}{s}$. Mit dieser Geschwindigkeit und der Strecke von 15m wird nun t_y berechnet:

$$s_y = v_y * t_y \Rightarrow t_y = \frac{s_y}{v_y} = \frac{15m}{0,1389 \frac{m}{s}} = 108s$$

Man braucht insgesamt also $t_x + t_y = 36s + 108s = 144s$ um an den gewünschten Punkt zu kommen.

b) Die Rechnung funktioniert hier analog, nur dass man die 15m nicht im Wasser sondern an Land zurücklegt. Dadurch entgeht man, dass man durch die Strömung beeinflusst wird. Hier lautet also $v_y = 5 \frac{km}{h} = 1,3889 \frac{m}{s}$ und demnach

$$t_y = \frac{s_y}{v_y} = \frac{15m}{1,3889 \frac{m}{s}} = 10,8s$$

Hier ergibt sich also eine Gesamtdauer von $t_x + t_y = 36s + 10,8s = 46,8s$.

Es ist also die Variante schneller, wenn man schwimmt und sich mittreiben lässt und dann zurückläuft. Und zwar spart man hier 97,2 Sekunden!

3. Aufgabe

a) Es gilt

$$s_x(t) = v_{0x} * t = v_0 \cos \alpha * t = 24 \frac{m}{s} \cos \alpha * t$$

$$s_y(t) = v_{0y} * t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 \sin \alpha * t - \frac{1}{2}gt^2 = 24 \frac{m}{2} \sin \alpha * t - \frac{1}{2} * 9,81 \frac{m}{s^2} * t^2$$

Demnach lautet also

$$s(t) = (s_x(t), s_y(t)) = \left(24 \frac{m}{s} \cos \alpha * t, 24 \frac{m}{2} \sin \alpha * t - \frac{1}{2} * 9,81 \frac{m}{s^2} * t^2 \right)$$

b) Zuerst muss man sich überlegen, wie man geschickt die Wurfweite berechnen kann. Und zwar erhält man die Wurfweite aus der Gleichung für die Wurfparabel (die die Höhe in Abhängigkeit der Strecke berechnet):

$$h(s_x) = \tan \alpha s_x - \frac{1}{2}g \left(\frac{s_x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2$$

(Die Bezeichnungen habe ich ein wenig anders als in der VL gewählt, da ich das hier eindeutiger finde)

Dies ist ja eine nach unten geöffnete Parabel und die Wurfweite ergibt sich aus der Nullstelle der Funktion, d.h. wenn die Höhe gleich null ist:

$$\begin{aligned} 0 &= \tan \alpha s_x - \frac{1}{2}g \left(\frac{s_x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 \\ &= \tan \alpha s_x - \frac{gsx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{-2v_0^2 \cos^2 \alpha \tan \alpha}{g} s_x + s_x^2 \end{aligned}$$

Aus der p-q-Formel folgt

$$\begin{aligned} s_{x1,2} &= -\frac{-2v_0^2 \cos^2 \alpha \tan \alpha}{2g} \pm \sqrt{\left(\frac{-2v_0^2 \cos^2 \alpha \tan \alpha}{2g} \right)^2 - 0} \\ &= \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha \tan \alpha}{g} \pm \frac{-v_0^2 \cos^2 \alpha \tan \alpha}{g} \\ s_{x1} &= 0 \\ s_{x2} &= \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha \tan \alpha}{g} \end{aligned}$$

Die Wurfweite kann also mit

$$s_W = \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha \tan \alpha}{g}$$

berechnet werden.

Um jetzt den Winkel zu bestimmen, unter dem die Wurfweite maximal wird, müssen wir s_W als Funktion von α betrachten und das Maxima ausrechnen.

$$\begin{aligned} s_W(\alpha) &= \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha \tan \alpha}{g} \\ s'_W(\alpha) &= \frac{2v_0^2}{g} * 2 \cos \alpha * (-\sin \alpha) * \tan \alpha + \frac{2v_0^2}{g} \cos^2 \alpha * \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ &= \frac{-4v_0^2}{g} \cos \alpha \sin \alpha \tan \alpha + \frac{2v_0^2}{g} \\ &= \frac{-4v_0^2}{g} \sin^2 \alpha + \frac{2v_0^2}{g} \\ 0 &= \frac{-4v_0^2}{g} \sin^2 \alpha + \frac{2v_0^2}{g} \\ 0 &= \frac{-4 * \left(24 \frac{m}{s}\right)^2}{9,81 \frac{m}{s^2}} \sin^2 \alpha + \frac{2 * \left(24 \frac{m}{s}\right)^2}{9,81 \frac{m}{s^2}} \\ \frac{-4 * \left(24 \frac{m}{s}\right)^2}{9,81 \frac{m}{s^2}} \sin^2 \alpha &= -\frac{2 * \left(24 \frac{m}{s}\right)^2}{9,81 \frac{m}{s^2}} \\ \sin^2 \alpha &= \frac{2 * \left(24 \frac{m}{s}\right)^2}{9,81 \frac{m}{s^2}} * \frac{9,81 \frac{m}{s^2}}{-4 * \left(24 \frac{m}{s}\right)^2} \\ \sin^2 \alpha &= 0,5 \\ \alpha &= \arcsin \sqrt{0,5} \\ \alpha &= 45^\circ \end{aligned}$$

Die Wurfweite ist also unter dem Winkel von 45° am größten.

Jetzt wird noch die Weite berechnet:

$$\begin{aligned} s_W &= \frac{2v_0^2 \cos^2(45^\circ) \tan(45^\circ)}{g} \\ &= \frac{2 * \left(24 \frac{m}{s}\right)^2 \cos^2(45^\circ) \tan(45^\circ)}{9,81 \frac{m}{s^2}} \\ &= 58,716m \end{aligned}$$

Die Wurfweite beträgt also ca. 58,7m.