

Mathematik für Informatiker III
(Frank Hoffmann)

von Alexander Haucke

1. **Determinanten I, Verständnis** (6 Punkte) Welche der folgenden Aussagen sind für beliebige $A, B, C \in M(n \times n, K)$ und $\lambda \in K$ richtig? (Beachten Sie den Fall $n = 1$!) Geben Sie jeweils eine kurze Begründung bzw. ein Gegenbeispiel.

(a) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$

Die Aussage ist richtig für $n = 1$ und falsch für $n > 1$:

Sei $n = 1$. Dann sind A und B Körperelemente, also $A = a$ und $B = b$ mit $a, b \in K$ und es gilt $\det(a + b) = a + b = \det(a) + \det(b)$.

Sei nun $n > 1$. Dann gilt die Aussage nicht mehr:

Wir betrachten als Gegenbeispiel den Fall $A = B = E$, d. h. A und B sind die $(n \times n)$ -Einheitsmatrix. Dann ist $A + B$ die Diagonalmatrix mit Zweien auf der Diagonalen und es gilt $\det(A + B) = 2^n$ (Produkt der Diagonaleinträge), aber $\det(A) + \det(B) = 1 + 1 = 2 \neq 2^n$ für $n > 1$.

(b) $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$

Die Aussage ist richtig für $n = 1$ und falsch für $n > 1$:

Sei $n = 1$. Analog zu (a) gilt dann $\det(\lambda a) = \lambda a = \lambda \det(a)$.

Sei nun $n > 1$. Dann gilt die Aussage nicht mehr:

Aus der Matrix λA erhalten wir die Matrix A , indem wir jeden Matrixeintrag durch λ teilen. Da die Determinantenfunktion aber linear in jeder Zeile ist, müssten wir, um hier von $\det(\lambda A)$ auf $\det(A)$ zu kommen, den Faktor λ aus jeder der n Spalten ziehen; es gilt also $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A) \neq \lambda \det(A)$ für $\lambda \neq 1$ und $\lambda \neq 0$.

(c) $\det(A(BC)) = \det((AB)C)$

Die Aussage ist richtig für alle n :

Da Matrixmultiplikation assoziativ ist, gilt $A(BC) = (AB)C$ für alle $A, B, C \in M(n \times n, K)$ und damit auch $\det(A(BC)) = \det((AB)C)$.

(d) $\det(A) = 1 \Rightarrow A = E$

Die Aussage ist richtig für $n = 1$ und falsch für $n > 1$:

Für $n = 1$ gilt offensichtlich $\det(a) = 1 \Rightarrow a = 1$.

Für $n > 1$ gilt die Aussage nicht mehr, denn wie wir wissen ist die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix das Produkt ihrer Diagonaleinträge, d. h. für jede obere Dreiecksmatrix A mit Einsen auf der Diagonalen gilt $\det(A) = 1$.

(e) $\det(A) = 1 \Rightarrow A$ gehört zu injektiver Abbildung $K^n \rightarrow K^n$

Die Aussage ist richtig für alle n :

Angenommen, die Abbildung wäre nicht injektiv. Dann gäbe es ein $v \neq \vec{0}$ im Kern dieser Abbildung, d. h. es würde gelten $Av = \vec{0}$. Damit wären

aber die Spalten von A linear abhängig, also wäre $\text{rg}(A) < n$ und damit $\det(A) = 0$ im Widerspruch zu $\det(A) = 1$.

- (f) $\det(A) = 1 \Rightarrow A$ gehört zu surjektiver Abbildung $K^n \rightarrow K^n$

Die Aussage ist richtig für alle n :

Wir erinnern uns an Aufgabe 5 c) vom 2. Aufgabenblatt:

Eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen gleicher endlicher Dimension ist genau dann injektiv, wenn sie surjektiv ist.

Da die hier vorliegende Abbildung $K^n \rightarrow K^n$ nach (e) injektiv ist, muss sie auch surjektiv sein.

2. Determinante II (2+2 Punkte)

- (a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A \in M(n \times n, K)$, die nur Nullen als Einträge hat, nur $a_{ij} = 1$ mit $i + j = n + 1$. Das heißt, auf der Nebendiagonalen stehen Einsen.
- (b) Sei D eine quadratische Matrix, die entlang der Hauptdiagonale A, B, C als quadratische Untermatrizen hat und ansonsten nur Nullen als Einträge besitzt.
Beweisen Sie, dass dann $\det D = \det A \cdot \det B \cdot \det C$ gilt.

$$D = \begin{pmatrix} A & & 0 \\ & B & \\ 0 & & C \end{pmatrix}$$

Wird korrigiert.

3. Lineare Gleichungssysteme (3+3 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie die Lösung des folgenden LGS mittels der Cramerschen Regel:

$$\begin{array}{rrcr} 3x_1 & +2x_2 & +4x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = & 2 \\ -x_1 & +3x_2 & -2x_3 & = & -1 \end{array}$$

- (b) Bestimmen Sie die Lösung des obigen LGS $(A|b)$, indem Sie mittels der komplementären Matrix die zu A inverse Matrix berechnen und diese Umkehrabbildung auf b anwenden.

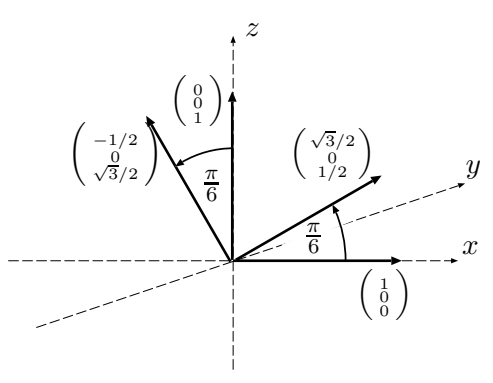
Wird korrigiert.

4. Drehung und Basiswechsel (6 Punkte)

Betrachten Sie im \mathbb{R}^3 die lineare Abbildung, die aus einer Drehung um die y -Achse um $\pi/6$ mit anschließender Drehung um die z -Achse um $\pi/4$ besteht. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix, das Bild von $(1, 2, 3)$ bei dieser Abbildung und die Koordinaten des Punktes $(1, 2, -3)$ bezüglich des Bildes der Standardbasis.

Lösung:

Für die erste Drehung um die y -Achse um $\pi/6$ erhält man



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) \\ 0 \\ \sin(\pi/6) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\sin(\pi/6) \\ 0 \\ \cos(\pi/6) \end{pmatrix}$$

und damit die Matrix

$$C_{y,\pi/6} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) & 0 & -\sin(\pi/6) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\pi/6) & 0 & \cos(\pi/6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

Mit einer entsprechenden Überlegung für die zweite Drehung, um die z -Achse um $\pi/4$, erhält man

$$C_{z,\pi/4} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) & 0 \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Darstellung der Komposition ist das Produkt

$$C := C_{z,\pi/4} \cdot C_{y,\pi/6} = \begin{pmatrix} \sqrt{6}/4 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/4 \\ -\sqrt{6}/4 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/4 \\ 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

und es gilt

$$C \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{6}/4 + \sqrt{2} - 3\sqrt{2}/4 \\ -\sqrt{6}/4 + \sqrt{2} + 3\sqrt{2}/4 \\ 1/2 + 3\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{6}/4 + \sqrt{2}/4 \\ -\sqrt{6}/4 + 7\sqrt{2}/4 \\ 1/2 + 3\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

Das Bild der Standardbasis ist

$$C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{6}/4 \\ -\sqrt{6}/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/4 \\ \sqrt{2}/4 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

Wir führen also einen Basiswechsel durch:

Da die Drehungen (und auch ihr Produkt) orthogonale Abbildungen sind, kann man die inversen Matrizen leicht durch Transposition bestimmen, d.h. für die Transformationsmatrix T des Basiswechsels von der Standardbasis zu der aus den Spalten von C gebildeten Basis gilt $T = C^{-1} = (C_{z,\pi/4} \cdot C_{y,\pi/6})^{-1} = C_{y,\pi/6}^{-1} \cdot C_{z,\pi/4}^{-1} = C_{y,\pi/6}^t \cdot C_{z,\pi/4}^t$, also

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{6}/4 & -\sqrt{6}/4 & 1/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix},$$

woraus sich die Koordinaten von $(1, 2, -3)$ bzgl. des Bildes der Standardbasis bestimmen lassen:

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{6}/4 - 3/2 \\ 3\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/4 - 3\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

Und tatsächlich ergibt die Probe:

$$\begin{aligned} & (-\sqrt{6}/4 - 3/2) \begin{pmatrix} \sqrt{6}/4 \\ -\sqrt{6}/4 \\ 1/2 \end{pmatrix} + (3\sqrt{2}/2) \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} + (\sqrt{2}/4 - 3\sqrt{3}/2) \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/4 \\ \sqrt{2}/4 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$