

1. Elementarmatrizen

Zuerst geht man vor wie beim Bilden der inversen Matrix, will also auf die Einheitsmatrix gelangen. Dann geht man alle Operationen sozusagen rückwärts und schreibt das in die Elementarmatrizen um (es werden nur Spaltenumformungen verwendet).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{I + III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I - 3II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2III + II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-5III + I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Operationen um von der Einheitsmatrix zur gewünschten Matrix zu kommen sehen also wie folgt aus:

$$-III \rightarrow 5III + I \rightarrow -2III + II \rightarrow 3II + I \rightarrow -I + III$$

Damit ergibt sich als Multiplikation der Elementarmatrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Matrixrang

Damit insgesamt der Rang 2 ist, muss der Spaltenrang ebenfalls gleich 2 werden. Dies wird erreicht, indem man zwei Spalten so konstruiert durch das x , dass eine linear abhängig von dne anderen ist.

$$\mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ x \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mu + \lambda x &= -2 \\ 2\mu + \lambda 3 &= x \\ \lambda &= -1 \\ \Rightarrow 2\mu - 3 &= x \\ \Rightarrow \mu - (2\mu - 3) &= -2 \\ \mu &= 5 \\ \Rightarrow x &= 7 \end{aligned}$$

Mit $x = 7$ ist die 3. Spalte linear abhängig von den andern beiden Spalten, und somit ist der Spaltenrang 2 und damit auch der Matrixrang.

3. Lineare Gleichungssysteme I

a) Mit Hilfe des Gaußverfahrens kann die Lösbarkeit und gegebenenfalls die Lösungsmenge bestimmt werden.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} 4I - II \\ 7I - III \\ 5I - IV \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} 3x_2 + 6x_3 = 2 \\ 3x_2 + 6x_3 = 1 \\ \Rightarrow 1 \neq 2 \end{array}$$

Das LGS ist also nicht lösbar.

b) Mit dem Gaußverfahren kann die Lösbarkeit und gegebenenfalls die Lösungsmenge bestimmt werden.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} 4I - II \\ 2I - III \\ 3I - IV \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 5 & -13 \\ 0 & 3 & 3 & -6 \\ 0 & -2 & 7 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 19 \\ 16 \\ 23 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} 3III + 4III \\ 2IV - II \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 27 & -63 \\ 0 & -2 & 7 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 19 \\ 121 \\ 27 \end{pmatrix}$$

$$3IV - III \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 27 & -63 \\ 0 & 0 & 0 & 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 19 \\ 121 \\ -40 \end{pmatrix}$$

Es ist also erkennbar, dass das LGS lösbar ist, machen wir uns an die konkrete Lösung:

$$\begin{aligned}x_4 &= \frac{-40}{36} = \frac{-10}{9} \\x_3 &= \frac{121 + 63 * \left(\frac{-10}{9}\right)}{27} = \frac{17}{9} \\x_2 &= \frac{19 - 5 * \frac{17}{9} + 13 * \left(\frac{-10}{9}\right)}{-4} = \frac{11}{9} \\x_1 &= \frac{7 + \frac{11}{9} - 2 * \frac{17}{9} + 3 * \frac{-10}{9}}{1} = \frac{10}{9}\end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ergibt sich als

$$L = \left\{ \frac{-10}{9}, \frac{17}{9}, \frac{11}{9}, \frac{10}{9} \right\}$$

4. Lineare Gleichungssysteme II

5. Nochmal Kern und Bild

a) Für den Kern muss gelten $f_A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \vec{0}$. Es wird jetzt per LGS eine Lösung ermittelt um daraus die Basis abzuleiten.

$$\begin{aligned}I \quad & x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\II \quad & x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\III \quad & -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\IV \quad & x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\II + III \quad & 2x_2 + x_4 = 0 \Rightarrow x_4 = -2x_2 \\& \Rightarrow x_1 + x_2 - 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \\x_1 + 5x_1 + x_3 - 6x_1 = 0 \quad & \Rightarrow x_3 = 0\end{aligned}$$

Die Basis besteht also aus einem Vektor

$$B_{\text{Ker}(f_A)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) Um die Dimension zu ermitteln, wird geprüft, ob die Lösungen linear abhängig sind oder nicht.

$$f_A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix}$$
$$f_A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Da wie man leicht erkennt die beiden Vektoren linear unabhängig sind, muss die Dimension 2 sein.