

## 1. Isometrie

a)

b)

## 2. Eigenwerte

a) Bei einem Automorphismus sind die Eigenwerte von  $f$  und  $f^{-1}$  zueinander die Kehrwerte. Und zwar gilt ja

$$w = f(v) = \lambda v \quad f^{-1}(w) = v = \frac{w}{\lambda}$$

b) Die Eigenwerte erhält man als Lösungen des charakteristischen Polynoms:

$$\begin{aligned} p_f(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) + 8 - (3(3-\lambda) + (1-\lambda) * 4 * (-1)) \\ &= (3-\lambda-3\lambda+\lambda^2)(2-\lambda) + 8 - (9-3\lambda-4+4\lambda) \\ &= 6-3\lambda-2\lambda+\lambda^2-6\lambda+3\lambda^2+2\lambda^2-\lambda^3+8-(5+\lambda) \\ &= -\lambda^3+6\lambda^2-12\lambda+9 \\ \lambda_1 &= 3 \end{aligned}$$

Durch Ausklammern der Nullstelle und Durchführen von Polynomdivision erhält man eine quadratische Gleichung  $\lambda^2 - 3\lambda + 3$ .

$$\lambda_{2/3} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 3}$$

Die quadratische Gleichung hat keine Lösung. Es gibt also nur den Eigenwert  $\lambda = 3$ . Die Matrix sieht nun wie folgt aus

$$A' = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Der Eigenvektor berechnet sich als Lösung des folgenden LGS

$$\begin{aligned} I \quad -2x + 2y + 3z &= 0 \\ II \quad 4z &= 0 \\ III \quad x - y - z &= 0 \\ &\Rightarrow z = 0 \\ &\Rightarrow x = y \end{aligned}$$

Das  $x$  kann also beliebig gewählt werden, nimm ich einfach mal  $x = 1$ . Der Eigenvektor ist also

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wie man oben schon erkennt, ist der Spaltenrang, und somit der Rang der Matrix, gleich 2. Demnach ist die Dimension des Kerns 1. Deshalb ergibt sich für den Eigenraum

$$E_1 = \text{Lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

c) Die Matrix hat die Form

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Es ist bekannt, dass die Eigenvektoren die Lösung des LGS sind, das sich aus dem charakteristischen Polynom und den Eigenwerten ergibt:

$$\begin{aligned} (a+1) + b &= 0 \\ c + (d+1) &= 0 \\ (a-2) * 5 + b * 2 &= 0 \\ c * 5 + (d-2) * 2 &= 0 \\ &\Rightarrow c = -(d+1) \\ \Rightarrow -5d - 5 + 2d - 4 &= 0 \Rightarrow d = -3, c = 2 \\ &\Rightarrow b = -(a+1) \\ \Rightarrow 5a - 10 - 2a - 2 &= 0 \Rightarrow a = 4, b = -5 \end{aligned}$$

Die Matrix hat also die Form

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

### 3. Fibonacci-Zahlen

Wenn man ein bisschen rumrechnet und probiert, dann findet man heraus, dass die gesuchte Matrix wie folgt aussehen muss:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Eine Diagonalmatrix lässt sich wie gelernt sehr elegant über die Eigenwerte berechnen. Die Eigenwerte ergeben sich als Lösung des charakteristischen Polynoms.

$$\begin{aligned}P_f(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\&= -\lambda(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 \\ \lambda_{1/2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 1} \\&= \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \lambda_1 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

Die Diagonalmatrix hat auf der Diagonale ja jetzt die Eigenwerte zu stehen, und ergibt sich demzufolge als

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

Das sieht ja soweit ganz nett aus. Jetzt braucht man noch die Transformationsmatrix. Diese ergibt sich ja aus den Eigenvektoren als Spalten der Matrix. Und die Eigenvektoren sind ja die Lösungen des folgenden LGS.

Als erstes  $v_1$

$$\begin{aligned}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + \left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x_2 &= 0 \\ \Rightarrow x_2 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}x_1 \\ x_1 + \left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) * \frac{1+\sqrt{5}}{2}x_1 &= 0 \\ x_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}x_1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 x_1 &= 0 \\ \Rightarrow 0 &= 0\end{aligned}$$

Es ist also egal, wie das  $x_1$  gewählt wird.  $v_1$  kann also als

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

$v_2$  ergibt sich analog als

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

Demnach ist die Transformationsmatrix

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

Und die Inverse

$$T^{-1} = \frac{1}{\det(T)} * \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Es ist bekannt, dass  $A = T^{-1} * D * T$  gilt. Entsprechend muss dann für  $A^n = T^{-1} D T T^{-1} D T \dots T^{-1} D T$  gelten. Die nebeneinander stehenden  $T$  und  $T^{-1}$  können zur Einheitsmatrix zusammengefasst werden. Demnach gilt

$$\begin{aligned} A^n &= T^{-1} D^n T \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & \frac{-1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{-1}{\sqrt{5}} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n & \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{-1}{\sqrt{5}} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die erste Spalte entspricht dann wie man sieht  $f_{n-1}$  und  $f_n$ .

## 4. Nullstellen über verschiedene Körpern

Es ist von  $p(x) = x^2 + 2$  die Nullstellen in den verschiedenen Räumen zu bestimmen.

$\mathbb{R}(x)$   $x^2 = -2$  Hier gibt es also keine Nullstelle.

$\mathbb{C}(x)$   $x^2 = -2$ , also  $x_{1/2} = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}i$ . Es gibt also zwei Nullstellen.

$\mathbb{F}_3(x)$  Es können hier nur 0, 1 oder 2 Nullstellen sein. Wenn man einsetzt ergibt sich, dass eine Nullstelle bei  $x_1 = 1$  und eine bei  $x_2 = 2$  liegt.

$\mathbb{F}_7(x)$

$$0 = x^2 + 2 \quad | + 5$$

$$5 = x^2$$

Es gibt allerdings keinen Wert, für den die Gleichung erfüllt wird. Also auch hier keine Nullstelle.