

1. Dichte, Verteilungsfunktion

a) Die Dichte ist gegeben durch

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Verteilungsfunktion ist definiert als das Integral der Dichte, demnach

$$F_X(x) = \begin{cases} x^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

b) Die Dichte ergibt sich als Ableitung der Verteilungsfunktion:

$$f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} \frac{-4x}{(2+2x^2)^2} & -\infty < x \leq 0 \\ \frac{4x}{(2+2x^2)^2} & 0 < x < \infty \end{cases}$$

c) Die Verteilungsfunktion muss monoton steigend sein, daher muss gelten, dass $c * e^{-|t|}$ positiv ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man $c * e^{-|t|} \geq 1$ annehmen:

$$\begin{aligned} c * e^{-|t|} &\geq 1 \\ c * \frac{1}{e^{|t|}} &\geq 1 \\ c &\geq e^{|t|} \end{aligned}$$

Z.B. kann also $c = 3^{|t|}$ gewählt werden, damit es sich um eine Verteilungsfunktion handelt.

2. Erwartungswerte

Der Radius der Kugel, die durch ihren Mittelpunkt z bestimmt wird, entspricht ja genau dem Abstand von z zum Rand des Würfels. Jeder Abstand zum Rand der Größe x definiert einen kleineren Würfel, welcher die Seitenlänge $1 - 2x$ besitzt. Und demnach das Volumen von $(1 - 2x)^3 = 1 - 6x + 12x^2 - 8x^3$ hat. Wir interessieren uns ja nun aber für das Volumen des Randes. Das ist dann das Volumen des ganzen Würfels ohne den kleinen Würfel: $1 - (1 - 6x + 12x^2 - 8x^3) = 6x - 12x^2 + 8x^3$. Das definiert uns auch schon die Verteilungsfunktion, denn die Wahrscheinlichkeit für Abstand x liegt ja in diesem Rand drin. Da es für die Wahrscheinlichkeit egal ist, ob der Punkt links oder rechts liegt, muss man nur in dem Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ gucken.

Die Verteilungsfunktion ergibt sich demnach als

$$F_{R(z)}(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 6z - 12z^2 + 8z^3 & 0 \leq z \leq \frac{1}{2} \\ 1 & z > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Die Dichte ergibt sich als Ableitung der Verteilungsfunktion, lautet also

$$f_{R(z)}(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 6 - 24z + 24z^2 & 0 \leq z \leq \frac{1}{2} \\ 0 & z > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Der Erwartungswert von $R(z)$ ergibt sich dann als

$$\begin{aligned} E(R(z)) &= \int_{-\infty}^{\infty} z * (6 - 24z + 24z^2) dz \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} 6z - 24z^2 + 24z^3 dz \\ &= 3z^2 - 8z^3 + 6z^4 \Big|_0^{\frac{1}{2}} \\ &= 3 * \frac{1}{4} - 8 * \frac{1}{8} + 6 * \frac{1}{16} \\ &= \frac{3}{4} - 1 + \frac{3}{8} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Es ist also ein Radius von $\frac{1}{8}$ zu erwarten.

Die Oberfläche lässt sich nun als Zufallsvariable auf den Radius zurückführen. Und zwar gilt $A = 4\pi r^2$. Es gilt also hier für den Erwartungswert

$$\begin{aligned} E(S(z)) &= \int_{-\infty}^{\infty} 4\pi z^2 * (6 - 24z + 24z^2) dz \\ &= 4\pi \int_0^{\frac{1}{2}} 6z^2 - 24z^3 + 24z^4 dz \\ &= 4\pi * (2z^3 - 6z^4 + \frac{24}{5}z^5 \Big|_0^{\frac{1}{2}}) \\ &= 4\pi * (2 * \frac{1}{8} - 6 * \frac{1}{16} + \frac{24}{5} * \frac{1}{32}) \\ &= \frac{\pi}{10} \end{aligned}$$

Die Oberfläche wird demnach erwartet $\frac{\pi}{10}$ Flächeneinheiten betragen.

Schlussendlich kommt noch das Volumen. Auch hier kann man das wieder aus dem Radius

herleiten. Es gilt $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

$$\begin{aligned} E(V(z)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{3}\pi z^3 * (6 - 24z + 24z^2) dz \\ &= \frac{4}{3}\pi \int_0^{\frac{1}{2}} 6z^3 - 24z^4 + 24z^5 dz \\ &= \frac{4}{3}\pi * \left(\frac{6}{4}z^4 - \frac{24}{5}z^5 + 4z^6 \Big|_0^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{4}{3}\pi * \left(\frac{3}{2} * \frac{1}{16} - \frac{24}{5} * \frac{1}{32} + 4 * \frac{1}{64} \right) \\ &= \frac{\pi}{120} \end{aligned}$$

Es wird also ein Volumen von $\frac{\pi}{120}$ Volumeneinheiten erwartet.

3. Markov + Tschebyshev

Die Zufallsvariable X gebe die Anzahl der Würfe an, bis die Augenzahl 5 beträgt. Die Wahrscheinlichkeit, bei einem Wurf mit drei Würfeln die Augenzahl 5 zu erhalten beträgt $\frac{1}{36}$. Es handelt sich hierbei um eine geometrische Verteilung, daher sind Erwartungswert und Varianz schnell berechnet:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{36}} = 36 \\ \text{Var}(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{36^2}} - \frac{1}{\frac{1}{36}} = 1260 \end{aligned}$$

Jetzt ist die Wahrscheinlichkeit abzuschätzen, dass man mehr als $3 * E(X)$ Würfe benötigt. Nach Markov gilt:

$$\Pr(X \geq 3E(X)) \leq \frac{E(X)}{3E(X)} = \frac{1}{3}$$

Und nach Tschebyshev:

$$\begin{aligned} \Pr(X \geq 3E(X)) &= \Pr(X - E(X) \geq 2E(X)) \\ &\leq \Pr(|X - E(X)| \geq 2E(X)) \leq \frac{\text{Var}(X)}{(2E(X))^2} = \frac{1260}{72^2} = 0,243 \end{aligned}$$

4. Varianzen

a) X sei die Zufallsvariable, die die Anzahl der 6en bei n Würfeln eines fairen Würfels angibt. Da es sich hier um eine Bernoulliverteilung handelt, ergibt sich der Erwartungswert als

$$E(X) = n * \frac{1}{6} = \frac{n}{6}$$

Und die Varianz dementsprechend als

$$\text{Var}(X) = n * \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6^2} \right) = \frac{5n}{36}$$

Wenn die Anzahl der 6en jetzt zwischen $\frac{n}{6} - \sqrt{n}$ und $\frac{n}{6} + \sqrt{n}$ liegen soll, dann entspricht das der Wahrscheinlichkeit von $\text{Pr}(|X - E(X)| < \sqrt{n})$. Das ist gerade das Gegenereignis zu $\text{Pr}(|X - E(X)| \geq \sqrt{n})$. Und das kann per Tschebyschev-Ungleichung abgeschätzt werden.

$$\begin{aligned} \text{Pr}(|X - E(X)| < \sqrt{n}) &= 1 - \text{Pr}(|X - E(X)| \geq \sqrt{n}) \geq 1 - \frac{\text{Var}(X)}{\sqrt{n}^2} \\ &= 1 - \frac{\frac{5n}{36}}{n} = 1 - \frac{5}{36} = \frac{31}{36} \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit ist also größergleich $\frac{31}{36} \approx 86\%$.

b)

5. Hilfsmittel