

Mathematik für Informatiker III
(Frank Hoffmann)

Abgabe: bis Mittwoch, den 05. Dezember 2007, 12¹⁵

1. **Determinanten I, Verständnis** (6 Punkte) Welche der folgenden Aussagen sind für beliebige $A, B, C \in M(n \times n, K)$ und $\lambda \in K$ richtig? (Beachten Sie den Fall $n = 1$!) Geben Sie jeweils eine kurze Begründung bzw. ein Gegenbeispiel.

- (a) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$
- (b) $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$
- (c) $\det(A(BC)) = \det((AB)C)$
- (d) $\det(A) = 1 \Rightarrow A = E$
- (e) $\det(A) = 1 \Rightarrow A$ gehört zu injektiver Abbildung $K^n \rightarrow K^n$
- (f) $\det(A) = 1 \Rightarrow A$ gehört zu surjektiver Abbildung $K^n \rightarrow K^n$

2. **Determinante II** (2+2 Punkte)

- (a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A \in M(n \times n, K)$, die nur Nullen als Einträge hat, nur $a_{ij} = 1$ mit $i + j = n + 1$. Das heißt, auf der Nebendiagonalen stehen Einsen.
- (b) Sei D eine quadratische Matrix, die entlang der Hauptdiagonale A, B, C als quadratische Untermatrizen hat und ansonsten nur Nullen als Einträge besitzt. Beweisen Sie, dass dann $\det D = \det A \cdot \det B \cdot \det C$ gilt.

$$D = \begin{pmatrix} A & & 0 \\ & B & \\ 0 & & C \end{pmatrix}$$

3. **Lineare Gleichungssysteme** (3+3 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie die Lösung des folgenden LGS mittels der Cramerschen Regel:

$$\begin{array}{rrcr} 3x_1 & +2x_2 & +4x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = & 2 \\ -x_1 & +3x_2 & -2x_3 & = & -1 \end{array}$$

- (b) Bestimmen Sie die Lösung des obigen LGS $(A|b)$, indem Sie mittels der komplementären Matrix die zu A inverse Matrix berechnen und diese Umkehrabbildung auf b anwenden.

4. Drehung und Basiswechsel (6 Punkte)

Betrachten Sie im \mathbb{R}^3 die lineare Abbildung, die aus einer Drehung um die y -Achse um $\pi/6$ mit anschließender Drehung um die z -Achse um $\pi/4$ besteht. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix, das Bild von $(1, 2, 3)$ bei dieser Abbildung und die Koordinaten des Punktes $(1, 2, -3)$ bezüglich des Bildes der Standardbasis.