

Mathematik für Informatiker III
(Frank Hoffmann)

Abgabe: bis Montag, den 11. Februar 2008, 12¹⁵

Zur Auffrischung einige Aufgaben zur linearen Algebra! Das, was Sie abgeben, wird auch kontrolliert. Aber, wer noch Punkte benötigt, kreuzt bitte Aufgaben seiner Wahl mit insgesamt höchstens 10 Punkten an und diese werden bewertet.

Abgabe ist schon am 11.02. vor der Vorlesung.

1. **Determinante** (3 Punkte)

Nach welcher Regel kann man mit Hilfe der Determinante einer Matrix A und der Komplementärmatrix die inverse Matrix zu A bestimmen?

Bestimmen Sie die inverse Matrix über dem Körper \mathbb{F}_5 zu

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2. **Verschiedenes Algebraisches** (3+2+2 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie, für welche $a, b \in \mathbb{R}$ das folgende reelle lineare Gleichungssystem lösbar ist. Kommentieren Sie Ihr Vorgehen.

$$\begin{array}{rrrrrcl} -x_1 & +5x_2 & +3x_3 & -2x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +x_4 & = & a \\ & +13x_2 & +10x_3 & -3x_4 & = & 2 \\ -3x_1 & +2x_2 & -x_3 & -3x_4 & = & b \end{array}$$

- (b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die durch $f(x, y) = (2x, -y + 2x)$ definierte lineare Abbildung. Sei $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Drehung um $\pi/2$ im Uhrzeigersinn. Bestimmen Sie die Matrizen der Abbildungen $f \circ g$ und $g \circ f$.
- (c) Sei A die $n \times n$ -Adjazenzmatrix eines gerichteten Graphen auf den Knoten $1, \dots, n$. Das heisst, $a_{ij} = 1$ wenn es eine Kante von i nach j gibt und 0 sonst. Wir wollen auch annehmen, dass es keine Kante von einem Knoten zu sich selbst gibt, also auf der Diagonale stehen Nullen. Sei $B = A^k$. Dies ist wieder eine $n \times n$ -Matrix. Zeigen Sie, dass der Koeffizient b_{ij} die Anzahl derjenigen verschiedenen gerichteten Kantenzüge von i nach j angibt, die genau aus k Kanten bestehen. Es bietet sich vollständige Induktion an.
Hinweis: So ein Kantenzug muss nicht doppelpunktfrei sein, ein Knoten kann auch mehrmals besucht werden.

3. Euklidischer Vektorraum (2+4 Punkte)

- (a) Sei V ein euklidischer Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $z \in V$ ein normierter Vektor. Zeigen Sie, dass dann die Abbildung

$$f_z(x) = x - 2 \langle z, x \rangle z \quad \forall x \in V$$

eine Isometrie ist.

- (b) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis des Lösungsraums des linearen Gleichungssystems

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0$$

4. Auto- und Endomorphismen (0+2+2 Punkte)

- (a) Wann nennt man eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow V$ (V ein Vektorraum) einen Automorphismus?
- (b) Überprüfen Sie, ob die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(x, y, z) = (x + 3y + 4z, 2y - z, x - y + 6z)$$

ein Automorphismus ist! Begründung!

- (c) Sei $f : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus und α eine reelle Zahl. Zeigen Sie, dass f und die Abbildung $f - \alpha \cdot id_V$ dieselben Eigenvektoren haben.