

Mathematik für Informatiker III  
(Frank Hoffmann)

Abgabe: bis Mittwoch, den 28. November 2007, 12<sup>15</sup>

1. **Elementarmatrizen** (2 Punkte) Schreiben Sie die folgende  $3 \times 3$  Matrix als Produkt von Elementarmatrizen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

2. **Matrixrang** (2 Punkte)

Für welches reelle  $x$  hat die folgende Matrix den Rang 2?

$$\begin{pmatrix} 1 & x & -2 \\ 2 & 3 & x \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. **Lineare Gleichungssysteme I** (4+4 Punkte)

Bestimmen Sie Lösbarkeit und ggf. Lösungsmenge für folgende reelle lineare Gleichungssysteme!

(a)

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 1 \\ 4x_1 & +5x_2 & +6x_3 & = & 2 \\ 7x_1 & +8x_2 & +9x_3 & = & 3 \\ 5x_1 & +7x_2 & +9x_3 & = & 4 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & -x_2 & +2x_3 & -3x_4 & = & 7 \\ 4x_1 & & +3x_3 & +x_4 & = & 9 \\ 2x_1 & -5x_2 & +x_3 & & = & -2 \\ 3x_1 & -x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & -2 \end{array}$$

4. **Lineare Gleichungssysteme II** (4 Punkte)

Sei  $U \subset K^n$  ein Vektorraum und  $x \in K^n$ . Zeigen Sie, dass es ein lineares Gleichungssystem mit  $n$  Gleichungen und  $n$  Unbekannten gibt, das als Lösungsmenge genau  $x + U$  hat.

5. **Nochmal Kern und Bild** (4 Punkte)

Eine lineare Abbildung  $f_A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  sei gegeben durch

$$f_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie je eine Basis vom Kern und vom Bild der Abbildung!

(b) Welche Dimension hat der von den Vektoren  $f_A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $f_A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  erzeugte  
Bildraum?

*Hinweis:* Dies ist eine alte Klausuraufgabe.