

1. Vektorraum I

Der \mathbb{Z}_2^3 Vektorraum besteht aus folgenden Vektoren:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Die sich daraus ergebenden Unterräume lauten:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Es gibt insgesamt also 12 mögliche Unterräume.

2. Vektorraum II

a) Um zu zeigen, dass die Addition und die Multiplikation wohldefiniert sind muss bewiesen werden, dass die Wahl des Repräsentanten egal ist.

Zuerst die Addition: Sei $v_1 + U = v_2 + U$. Zu zeigen ist, dass aus der Gleichheit auch $(v_1 + w) + U = (v_2 + w) + U$ gilt.

$$v_1 + U = v_2 + U \quad | + (w + U)$$

$$(v_1 + U) + (w + U) = (v_2 + U) + (w + U)$$

$$(v_1 + w) + U = (v_2 + w) + U \quad \text{nach Definition von } +$$

Die Addition ist also wohldefiniert. Gucken wir uns nun die Multiplikation mit einem Skalar an.

Sei wieder $v_1 + U = v_2 + U$ und es soll hieraus nun $\lambda v_1 + U = (\lambda v_2 + U)$ gefolgert werden.

$$v_1 + U = v_2 + U \quad | * \lambda$$

$$\lambda * (v_1 + U) = \lambda * (v_2 + U)$$

$$(\lambda * v_1) + U = (\lambda * v_2) + U \quad \text{nach Definition von } *$$

Auch hier passt die Gleichung. Die Operationen sind also nicht von der Wahl des Repräsentanten abhängig.

Wir erhalten jeweils wieder K -Vektorräume, da die Addition von Vektoren und das Multiplizieren mit einem Skalar abgeschlossen ist über dem Vektorraum V . Und da man nur mit Elementen aus U , was ein Unterraum von V ist, addiert kann nix passieren.

b) Im Vektorraum V/V wird jeder Vektor mit jedem anderen addiert. Da die Summe von zwei Vektoren nach Definition des Vektorraums wieder im selbigen liegt, muss das Ergebnis von V/V also wieder ganz V sein. Wir gucken uns als Beispiel mal $\mathbb{Z}_2^2/\mathbb{Z}_2^2$ an:

$$\mathbb{Z}_2^2/\mathbb{Z}_2^2 = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$$

$V/\{\vec{0}\}$ kreiert zu jedem $v \in V$ die Menge, die durch $\{v + \vec{0}\}$ beschrieben wird. Durch die Addition mit dem Nullvektor wird also eine Menge nur mit dem v selber gebildet. Insgesamt besteht $V/\{\vec{0}\}$ also aus $|V|$ Mengen, die jeweils nur das jeweilige v als Element enthalten. Zu \mathbb{Z}_2^2 ergibt sich zum Beispiel

$$V/\{\vec{0}\} = \{(0,0), \{(0,1)\}, \{(1,0)\}, \{(1,1)\}\}$$

\mathbb{R}^2 beschreibt die reelle Ebene und $U = \text{Lin}\{(1,2)\}$ eine Gerade g , die durch den Punkt $(1,2)$ und den Koordinatenursprung verläuft. Durch \mathbb{R}^2/U wird nun jeder Punkt (entspricht ja hier dem Vektor aus \mathbb{R}^2) mit der Gerade g addiert, d.h. durch jeden Punkt wird diese Gerade verlegt. Jede dieser neuen Geraden ist dann eine Nebenklasse von \mathbb{R}^2/U .

c) Es soll gezeigt werden, dass $\dim V/U = \dim V - \dim U$ gilt. Wir wissen, dass für eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ der Zusammenhang $\dim V = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$ gilt. Man schreibt die Ausgangsgleichung um zu $\dim V = \dim V/U + \dim U$. Und jetzt ...

3. Gleiche Unterräume

Da jeweils die lineare Hülle durch Basisvektoren aufgespannt wird, reicht es, um zu zeigen, dass beide den selben Unterraum beschreiben, jeweils den Basisvektor des einen Unterraums als Linearkombination der Basisvektoren des anderen darzustellen.

Daraus ergeben sich folgende Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned} I. & 2 = 2x + 2y \\ II. & 1 = 0x + 3y \quad | * 2 \Rightarrow y = 2 \\ III. & 0 = 2x + 1y \Rightarrow 0 = 2x + 2 \quad | + 3 \Rightarrow 3 = 2x \quad | * 3 \Rightarrow x = 4 \\ IV. & 4 = 4x + 4y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I. & 3 = 2x + 2y \\ II. & 3 = 0x + 3y \quad | * 2 \Rightarrow y = 1 \\ III. & 2 = 2x + 1y \Rightarrow 2 = 2x + 1 \quad | + 4 \Rightarrow 1 = 2x \quad | * 3 \Rightarrow x = 3 \\ IV. & 1 = 4x + 4y \end{aligned}$$

Da beide Gleichungssysteme eine eindeutige Lösung haben, kann die Basis $\{(2, 1, 0, 4), (3, 3, 2, 1)\}$ per Linearkombination durch die Basis $\{(2, 0, 2, 4), (2, 3, 1, 4)\}$ dargestellt werden. Somit sind die Unterräume gleich.

4. Lineare Abbildung

Um zu zeigen, dass es sich um eine lineare Abbildung handelt, muss folgender Zusammenhang nachgewiesen werden:

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^2 \lambda, \mu \in \mathbb{R} : f(\lambda v + \mu w) = \lambda f(v) + \mu f(w)$$

Seien also $v = (v_1, v_2)$, $w = (w_1, w_2)$ Vektoren aus \mathbb{R}^2 und λ, μ Skalare.

$$\begin{aligned} f(\lambda v + \mu w) &= f(\lambda(v_1, v_2) + \mu(w_1, w_2)) = f((\lambda v_1 + \mu w_1, \lambda v_2 + \mu w_2)) \\ &= (\lambda v_1 + \mu w_1 - (\lambda v_2 + \mu w_2), 0, \lambda v_2 + \mu w_2 - (\lambda v_1 + \mu w_1)) \\ \lambda f(v) + \mu f(w) &= \lambda f(v_1, v_2) + \mu f(w_1, w_2) = \lambda(v_1 - v_2, 0, v_2 - v_1) + \mu(w_1 - w_2, 0, w_2 - w_1) \\ &= (\lambda(v_1 - v_2), 0, \lambda(v_2 - v_1)) + (\mu(w_1 - w_2), 0, \mu(w_2 - w_1)) \\ &= (\lambda(v_1 - v_2) + \mu(w_1 - w_2), 0 + 0, \lambda(v_2 - v_1) + \mu(w_2 - w_1)) \\ &= (\lambda v_1 + \mu w_1 - (\lambda v_2 + \mu w_2), 0, \lambda v_2 + \mu w_2 - (\lambda v_1 + \mu w_1)) \end{aligned}$$

Da die Ergebnisse von beiden Gleichungen gleich sind, gilt der Zusammenhang und somit handelt es sich um eine lineare Abbildung.

Kern Man landet genau dann bei $\vec{0}$, wenn $x - y = 0$ und $y - x = 0$. Dies tritt ein, wenn $x = y$, also

$$\text{Ker}(f) = \{x, y \in \mathbb{R} \mid x = y\} = \text{Lin}(\{(1, 1)\})$$

Hiervon ist die Dimension 1, da die Basis $\{(1, 1)\}$ aus nur einem Vektor besteht.

Bild Das Bild erhält nur Vektoren, die in 1. und 3. Komponente den selben Betrag haben, allerdings mit unterschiedlichem Vorzeichen und in der 2. Komponente immer 0 sind.

$$\text{Im}(f) = \text{Lin}(\{1, 0, -1\})$$

Die Dimension ist hiervon 1, da die Basis nur ein Element hat.

5. Verständnis

a) \mathbb{R}^2 bildet mit komponentenweiser Addition und Multiplikationen keinen Körper. Und zwar gibt es damit Probleme, dass $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, *, (1, 1))$ keine abelsche Gruppe ist. Wenn man sich nämlich hier die Bedingung anschaut, dass es zu jedem Element ein inverses geben muss, dann funktioniert das hier nicht. Es kann nämlich zu $(0, a)$ und $(b, 0)$ gar keines geben, da man für kein a oder b und x, y die Gleichung $(0, a) * (x, y) = (1, 1)$ bzw. $(b, 0) * (x, y) = (1, 1)$ erfüllt kriegt.

b) Falsch! Und zwar kann ein Gegenbeispiel konstruiert werden:

$$\begin{aligned} V &= \mathbb{Z}_2^2 \\ V_1 &= \{(0,0), (1,0)\} \quad V_2 = \{(0,0), (1,1)\} \quad V_3 = \{(0,0), (0,1)\} \\ V_1 + (V_2 \cap V_3) &= V_1 + \{(0,0)\} = \{(0,0), (1,0)\} \\ (V_1 \cap V_2) + (V_1 \cap V_3) &= \{(0,0)\} + \{(0,0)\} = \{(0,0)\} \end{aligned}$$

Wie man sieht, bekommt man nicht dieselbe Lösung.

c) Richtig. Und zwar ist ja $\dim V = \dim W$. Es muss die Gleichung $\dim V = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$ erfüllt werden.

Man gehe davon aus, dass f surjektiv ist, also $\text{Im}(f) = W$ und somit

$$\dim V = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim W \Rightarrow \dim(\text{Ker}(f)) = 0$$

Der Kern von f hat aber nur genau dann die Dimension 0, also enthält nur den $\vec{0}$, wenn f ein Monomorphismus ist, d.h. injektiv.

Geht man davon aus, dass f injektiv ist, dann weiß man, dass es sich bei f um einen Monomorphismus handelt, es gilt also

$$\dim V = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = 0 + \dim(\text{Im}(f))$$

Da die Voraussetzung ist, dass die Dimensionen von V und W gleich sind, muss also $\dim(\text{Im}(f)) = \dim W$ sein, und das ist nur möglich, wenn f surjektiv ist.

d) Surjektive Abbildung bedeutet, dass ganz W im Bild von f liegt, also $\text{Im}(f) = W$. Damit ist also auch $\dim W = \dim(\text{Im}(f)) = 2$.

Es gilt der Zusammenhang $\dim V = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$, demnach muss der Kern also folgender Gleichung genügen:

$$\dim(\text{Ker}(f)) = \dim V - \dim(\text{Im}(f)) = 6 - 2 = 4$$

Die Dimension vom Kern ist also 4.

e) Die Dimension vom \mathbb{R} -Vektorraum muss auf alle Fälle größer sein, als die des \mathbb{Q} -Vektorraums, da \mathbb{R} im Gegensatz zu \mathbb{Q} überabzählbar viele Elemente hat. So können z.B. durch die Multiplikation mit einem Skalar aus \mathbb{R} neue Vektoren gebildet werden, die mit einem Skalar aus \mathbb{Q} nicht möglich wäre (z.B. $\sqrt{2} * \vec{v}$ geht in \mathbb{R} -Vektorraum aber nicht in \mathbb{Q} -Vektorraum).