

Mathematik für Informatiker III
(Frank Hoffmann)

von Alexander Haucke

1. **Dichte, Verteilungsfunktion** (1+1+1 Punkte)

- (a) Eine Zufallsvariable X habe die Dichte $f_X(x) = 2x$ für $0 < x < 1$ und ansonsten sei die Dichte 0. Finden Sie die zugehörige Verteilungsfunktion von X !

Die Verteilungsfunktion berechnet sich folgendermaßen: $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$.
Wir führen eine Fallunterscheidung durch:

- $x \leq 0 : F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$
- $0 < x < 1 : F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x 2t dt = 0 + t^2|_0^x = x^2.$
- $x \geq 1 : F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^1 2t dt + \int_1^x 0 dt = 0 + t^2|_0^1 + 0 = 1.$

Als Verteilungsfunktion ergibt sich also:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ x^2 & \text{für } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

- (b) Finden Sie für eine Zufallsvariable X mit der folgenden Verteilungsfunktion die zugehörige Dichte, falls sie existiert:

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(1+x^2)} & -\infty < x \leq 0, \\ \frac{1+2x^2}{2(1+x^2)} & 0 < x < \infty. \end{cases}$$

Um bei gegebener Verteilungsfunktion die Dichtefunktion zu finden, müssen wir einfach nur ableiten. Es ergibt sich:

- $x \leq 0 : f_X(x) = \left(\frac{1}{2(1+x^2)} \right)' = \frac{-4x}{4 \cdot (1+x^2)^2} = \frac{-x}{(1+x^2)^2}.$
- $x > 0 : f_X(x) = \left(\frac{1+2x^2}{2(1+x^2)} \right)' = \frac{8x \cdot (1+x^2) - 4x \cdot (1+2x^2)}{4 \cdot (1+x^2)^2} = \frac{x}{(1+x^2)^2}.$

Damit gilt also: $f_X(x) = \frac{|x|}{(1+x^2)^2}.$

Es bleibt zu überprüfen, ob f_X wirklich eine Dichtefunktion ist:

Offensichtlich ist f_X stetig und es gilt $f_X(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Es muss also nur noch nachgewiesen werden, ob $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) dt = 1$ ist:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) dt &= \lim_{a \rightarrow \infty} F_X(a) - F_X(-a) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1+2a^2}{2(1+a^2)} - \frac{1}{2(1+(-a)^2)} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2a^2}{2(1+a^2)} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2a^2}{2+2a^2} = 1. \end{aligned}$$

Damit ist $f_X(x) = \frac{|x|}{(1+x^2)^2}$ die zu F_X gehörige Dichtefunktion.

- (c) Für welchen Wert von c ist die folgende Funktion eine Verteilungsfunktion?

$$F(x) = \int_{-\infty}^x ce^{-|t|} dt$$

Die Aufgabenstellung ist äquivalent zu der Frage: Für welchen Wert von c ist $f_X(x) = ce^{-|x|}$ eine Dichtefunktion?

Wegen der Forderung $f_X(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ muss auf jeden Fall $c \geq 0$ gelten. Desweiteren muss die Forderung $\int_{-\infty}^{\infty} ce^{-|t|} dt = 1$ erfüllt sein. Hier beginnen wir mit folgender Beobachtung:

Da beim einzigen Auftreten in $ce^{-|t|}$ die Variable t in Betrag gesetzt ist, ist die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse. Es gilt also:

$$\int_{-\infty}^{\infty} ce^{-|t|} dt = 2 \int_0^{\infty} ce^{-t} dt = 2c \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -2ce^{-t} \Big|_0^{\infty} = \lim_{a \rightarrow \infty} -2ce^{-a} + 2ce^0 = 2c - \lim_{a \rightarrow \infty} 2ce^{-a} = 2c \text{ und es gilt } 2c = 1 \Leftrightarrow c = 1/2.$$

2. **Erwartungswerte** (8 Punkte) Betrachten Sie den Würfel $[0, 1]^3$ im \mathbb{R}^3 zusammen mit der Gleichverteilung der Punkte. Für einen zufälligen Punkt z im Würfel seien $R(z)$, $S(z)$ und $V(z)$ die Werte der Zufallsvariablen, die den Radius, die Oberfläche bzw. das Volumen der größten Kugel im Würfel mit Mittelpunkt in z beschreiben. Berechnen Sie deren Erwartungswerte und für eine der Variablen auch die Varianz !

Wird korrigiert.

3. **Markov+Tschebyschev** (2 Punkte)

Wir würfeln mit 3 fairen unterscheidbaren Würfeln bis die Summe der Augen bei einem Wurf 5 ist. Schätzen Sie sowohl mit der Markov- als auch der Tschebyschev-Ungleichung die Wahrscheinlichkeit ab, dass dies mindestens dreimal solange dauert wie im Erwartungswert.

Wird korrigiert.

4. **Varianzen** (2+2 Punkte)

- (a) Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit nach unten ab, dass bei n Würfeln eines fairen Würfels die Anzahl der Sechsen zwischen $n/6 - \sqrt{n}$ und $n/6 + \sqrt{n}$ liegt.

Hier handelt es sich um ein binomialverteiltes Zufallsexperiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 1/6$. Wir können also leicht Erwartungswert sowie Varianz bestimmen:

$$E(X) = n \cdot p = n/6 \text{ und } Var(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) = n/6 \cdot 5/6 = 5/36 \cdot n.$$

Wir schätzen nun mit der Tschebyschev-Ungleichung ab:

$$\begin{aligned} Pr(n/6 - \sqrt{n} < X < n/6 + \sqrt{n}) &= Pr(|X - n/6| < \sqrt{n}) \\ &= 1 - Pr(|X - n/6| \geq \sqrt{n}) \\ &\geq 1 - \frac{Var(X)}{\sqrt{n}^2} \\ &= 1 - \frac{5/36 \cdot n}{n} \\ &= 31/36. \end{aligned}$$

- (b) Es gibt einen einfachen Zusammenhang zwischen der Varianz einer Zufallsvariable X und der Varianz von $aX + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Finden und beweisen Sie ihn.

Wir benutzen den Zusammenhang $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$ und nutzen die Linearität des Erwartungswertes aus:

$$\begin{aligned}
 Var(aX + b) &= E((aX + b)^2) - E(aX + b)^2 \\
 &= E(a^2 X^2 + 2abX + b^2) - (E(aX) + E(b))^2 \\
 &= E(a^2 X^2) + E(2abX) + E(b^2) - (E(aX)^2 + 2E(aX)E(b) + E(b)^2) \\
 &= a^2 E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - (aE(X))^2 - 2abE(X) - b^2 \\
 &= a^2 E(X^2) - a^2 E(X)^2 \\
 &= a^2 (E(X^2) - E(X)^2) \\
 &= a^2 Var(X).
 \end{aligned}$$

5. **Hilfsmittel** (3 Punkte) Das zentrale Hilfsmittel bei der Berechnung von Erwartungswerten ist der folgende Satz.

Sei X eine Zufallsvariable und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Beweisen Sie, dass $E(g(X)) = \sum_{x \in Im(X)} g(x)p(X = x)$ für den Fall einer diskreten Zufallsvariable X und unter der Annahme, dass die auftretenden Summen absolut konvergieren.

Wenn wir die Zufallsvariable $g(X)$ mit Y bezeichnen, so ist nach Definition

$$E(Y) = \sum_{y \in \mathbb{R}} y \cdot p(Y = y).$$

In der Summation spielen nur die y eine Rolle, die tatsächlich im Bild $Im(Y) = g(Im(X))$ liegen. Desweiteren können wir schreiben:

$$p(Y = y) = \sum_{\substack{x \in Im(X) \\ g(x) = y}} p(X = x)$$

Also ergibt sich insgesamt:

$$E(g(X)) = \sum_{y \in g(Im(X))} y \cdot \sum_{\substack{x \in Im(X) \\ g(x) = y}} p(X = x) = \sum_{x \in Im(X)} g(x)p(X = x).$$