

1. σ -Algebra

a) Sei \mathcal{F} eine σ -Algebra mit gerade Anzahl von Ereignissen. Wenn man sie jetzt vergrößert und ein Ereignis A hinzunimmt, dann kommt automatisch noch das Komplement \bar{A} hinzu. \mathcal{F} hat also immer noch eine gerade Anzahl. Nun kommt noch jeder Schnitt hinzu. Allerdings auch zu jedem Schnitt das Komplement, was auch wieder eine gerade Anzahl macht. Also hat \mathcal{F} immer noch eine gerade Anzahl. Das würde für beliebig viele Ereignisse so sein. \square

b) Nein, es keine keine solche Algebra mit 6 Ereignissen geben. Die kleinste σ -Algebra enthält zwei Elemente, Ω und \emptyset . Mit dem Ereignis A kommt dann noch \bar{A} hinzu. Wenn jetzt noch ein Element B dazu genommen wird, braucht man zur σ -Algebra noch das Komplement \bar{B} und sämtliche Schnitte, was dann schon mehr als 6 Elemente sind.

2. Ziehen ohne Zurücklegen, Hypergeometrische Verteilung I

a) Die Elementarereignisse sind n -elementige Mengen. Davon gibt es genau $\binom{N}{n}$ Stück von. Jetzt braucht man noch die günstigen Ereignisse. Diese setzen sich so zusammen, dass man aus den schwarzen Kugeln genau $n-k$ ziehen muss und dann genau k aus den weißen Kugeln. Da wir hierbei nicht die Reihenfolge beachten kann das wieder über den Binomialkoeffizient berechnet werden. Es ergibt sich also insgesamt

$$Pr_k = \frac{\binom{s}{n-k} * \binom{w}{k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{N-w}{n-k} * \binom{w}{k}}{\binom{N}{n}}$$

b) Jeder Spieler bekommt 10 Karten zugeteilt, die restlichen beiden verbleiben dann im Skat. Insgesamt gibt es demnach $\binom{32}{10} * \binom{22}{10} * \binom{12}{10}$ Möglichkeiten, die Karten auszuteilen. Wenn jeder jetzt genau ein Ass bekommen soll, dann kann man die Asses gesondert betrachten und erhält somit hierfür $\binom{28}{9} * \binom{4}{1} * \binom{19}{9} * \binom{3}{1} * \binom{10}{9} * \binom{2}{1}$. Die Wahrscheinlichkeit ergibt sich demnach als

$$Pr(A) = \frac{\binom{28}{9} * \binom{4}{1} * \binom{19}{9} * \binom{3}{1} * \binom{10}{9} * \binom{2}{1}}{\binom{32}{10} * \binom{22}{10} * \binom{12}{10}} = 0,0556$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass beim Skat jeder Spieler ein Ass bekommt und das letzte im Skat liegt entspricht ca. 5,6%.

3. Hypergeometrische Verteilung II

Nach der hypergeometrischen Verteilung gilt

$$Pr_k(N) = \frac{\binom{N-r}{n-k} * \binom{r}{k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{N-1000}{2000-100} * \binom{1000}{100}}{\binom{N}{2000}}$$

4. False Positives

Die Ereignisse sind hier K Patient hat Krebs und P der Krebstest liefert ein positives Ergebnis. Demnach ist dann in der Aufgabe die Wahrscheinlichkeit $Pr(K|P)$ zu berechnen. Dazu sind folgende Wahrscheinlichkeiten schon gegeben:

$$\begin{aligned}Pr(K) &= 0,005 \Rightarrow Pr(\overline{K}) = 0,995 \\Pr(P|K) &= 0,96 \Rightarrow Pr(\overline{P}|K) = 0,04 \\Pr(\overline{P}|\overline{K}) &= 0,94 \Rightarrow Pr(P|\overline{K}) = 0,06\end{aligned}$$

Daraus kann über die totale Wahrscheinlichkeit $Pr(P)$ berechnet werden:

$$\begin{aligned}Pr(P) &= Pr(P|K) * Pr(K) + Pr(P|\overline{K}) * Pr(\overline{K}) \\&= 0,96 * 0,005 + 0,06 * 0,995 = 0,0645\end{aligned}$$

Und jetzt kann schlussendlich über den Satz von Bayes die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnet werden

$$\begin{aligned}Pr(K|P) &= \frac{Pr(K) * Pr(P|K)}{Pr(P)} \\&= \frac{0,005 * 0,96}{0,0645} = 0,0744\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass man tatsächlich Krebs hat, wenn der Test positiv ist, beträgt ca. 7,4%.

5. 2 Modellierungen

- 1.
2. Hierbei ist die Sehne durch ihren Mittelpunkt eindeutig festgelegt. Demnach enthält Ω jeden Punkt der Kreisfläche, also $\lambda^{(2)}(\Omega) = \pi$.
Der Grenzfall ist hier, dass die Sehne genau die Länge des gleichseitigen Dreiecks hat (also $a = \sqrt{3}$). Diese Sehnen bilden genau die Tangenten des Inkreises des Dreiecks. Demnach haben alle Sehnen, deren Mittelpunkt in dem Inkreis liegen, eine Länge $> a$. Jetzt muss also die Fläche A dieses Kreises bestimmt werden. Der Inkreisradius berechnet sich über

$$r_i = \frac{\sqrt{3}}{6} * a = \frac{\sqrt{3}}{6} * \sqrt{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Demnach ist die Fläche

$$\lambda^{(2)}(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 * \pi = \frac{\pi}{4}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Sehne länger als $\sqrt{3}$ ist, ergibt sich demnach als

$$Pr(> \sqrt{3}) = \frac{\lambda^{(2)}(A)}{\lambda^{(2)}(\Omega)} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\pi} = \frac{1}{4}$$

6. Unabhängigkeit

In A_1 liegen folgende Möglichkeiten: Es sind drei Ziffern ungerade und bei denen ist dann der zweite Wurf egal, also $|A_1| = 3 * 6 = 18$. A_2 sieht dementsprechend analog aus, also $|A_2| = 18$. Wenn die Augensumme ungerade sein soll, dann muss eine Ziffer gerade und die andere ungerade sein, dafür gibt es auch genau 18 Möglichkeiten, also $|A_3| = 18$.

Für $A_1 \cap A_2$ gibt es genau 9 Möglichkeiten, man kann zwischen drei Ziffern für den ersten Würfel und zwischen drei Ziffern für den zweiten Würfel wählen. Für $A_1 \cap A_3$ gibt es auch 9 Möglichkeiten, hier zählen alle nämlich von A_1 zu, die in der zweiten Komponente eine gerade Ziffer haben, und das sind genau die Hälfte der Elemente. $A_2 \cap A_3$ funktioniert wieder analog. Die Schnittmenge $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ ist leer, da zwei ungerade Ziffern nie eine ungerade Augensumme bilden können.

$$\begin{aligned}Pr(A_1 \cap A_2) &= \frac{9}{36} = \frac{18}{36} * \frac{18}{36} \\Pr(A_1 \cap A_3) &= \frac{9}{36} = \frac{18}{36} * \frac{18}{36} \\Pr(A_2 \cap A_3) &= \frac{9}{36} = \frac{18}{36} * \frac{18}{36} \\Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= 0 \neq \frac{18}{36} * \frac{18}{36} * \frac{18}{36}\end{aligned}$$

Die Ereignisse sind also paarweise aber nicht total unabhängig.

7. Teilmuster

Die Wahrscheinlichkeit für das Muster P beträgt sich auf $Pr(P) = \frac{1}{2^k}$ und dementsprechend $Pr(\bar{P}) = \frac{2^k - 1}{2^k}$. Für große n kann o.B.d.A. angenommen werden, dass $n = m * k$ ist. Wenn das Ereignis A eintreten soll, dass heißt, dass bei einer Länge n kein einziges mal Muster P auftritt, dann berechnet sich das nach

$$Pr(A) = \frac{2^k - 1^m}{2^k}$$

Für $n \rightarrow \infty$ geht auch $m \rightarrow \infty$. Es gilt also

$$\lim_{m \rightarrow \infty} Pr(A) = \lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\frac{2^k - 1}{2^k} \right)}_{<1}^m = 0$$