

Mathematik für Informatiker III  
(Frank Hoffmann)

1. Isometrie

- (a) Sei  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $\langle x, x \rangle = x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$ . Beweisen Sie, dass die Matrix

$$A = E - 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} (x_1, \dots, x_n)$$

orthogonal ist, dass heißt, eine Isometrie definiert.

**Lösung:** Wir schreiben zunächst  $A$  etwas um:

$$\begin{aligned} A &= E - 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} (x_1, \dots, x_n) = E - \begin{pmatrix} -2x_1^2 & \dots & -2x_1x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -2x_1x_n & \dots & -2x_n^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 - 2x_1^2 & \dots & -2x_1x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -2x_1x_n & \dots & 1 - 2x_n^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Man beachte, dass  $A$  gleich  $A^t$  ist. Nun erinnert man sich daran, dass eine Charakterisierung von Isometrien in der Bedingung  $A^{-1} = A^t$  besteht. Wir müssen also nur nachrechnen, dass tatsächlich  $A^2 = E$  gilt.

Die Einträge  $a_{ii}$  auf der Diagonale von  $A^2$  haben die Gestalt

$$\begin{aligned} a_{ii} &= 4x_1^2x_i^2 + \dots + 4x_{i-1}^2x_i^2 + (1 - 2x_i^2)^2 + 4x_{i+1}^2x_i^2 + \dots + 4x_n^2x_i^2 = \\ &= 4x_i^2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + 1 - 4x_i^2 = 1 \end{aligned}$$

Die Einträge  $a_{ij}$ ,  $i < j$ , sind 0:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= 4x_1^2x_ix_j + \dots + 4x_{i-1}^2x_ix_j + (1 - 2x_i^2)(-2x_ix_j) + \dots + 4x_n^2x_ix_j = \\ &= 4x_ix_j(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - 2x_ix_j - 2x_ix_j = 0 \end{aligned}$$

- (b) Seien  $U, V$  Unterräume gleicher Dimension in einem euklidischen Vektorraum  $W$ . Zeigen Sie, dass es eine Isometrie  $f : U \rightarrow V$  gibt.  
(wird korrigiert)

2. Eigenwerte(wird korrigiert)

- (a) Sei  $f$  ein Automorphismus. Welche Zusammenhänge bestehen zwischen den Eigenwerten und den Eigenvektoren von  $f$  und  $f^{-1}$ ?

- (b) Betrachten Sie den Endomorphismus von  $\mathbb{R}^3$  mit der Standardbasis, der gegeben ist durch die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie **die reellen** Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume.

- (c) Gesucht ist eine  $2 \times 2$ -Matrix  $A$ , deren Eigenwerte  $-1$  und  $2$  sind mit den dazugehörigen Eigenvektoren  $(1, 1)$  und  $(5, 2)$ .

### 3. Fibonacci-Zahlen

Sei  $f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-2} + f_{n-1}, n > 1$  die Folge der Fibonacci-Zahlen. Ziel ist es, die folgende Formel von Binet zu beweisen:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Finden Sie zunächst eine  $2 \times 2$ -Matrix  $A$ , so dass für  $n > 0$  (**korrigiert!**):

$$A^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie dann eine Diagonalmatrix  $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$  mit  $\alpha > \beta$  und die dazugehörige Transformationsmatrix  $T$  mit  $A = T^{-1} \cdot D \cdot T$ . Jetzt können Sie  $A^n$  bestimmen und sollten dann die Formel herleiten können.

**Lösung:** Wegen  $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $A^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ergibt sich

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Als nächstes diagonalisieren wir  $A$ : Das charakteristische Polynom lautet

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix} = t^2 - t - 1.$$

Seine Nullstellen (also die Eigenwerte) sind:

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Die zugehörigen Eigenvektoren haben die Form:

$$\lambda \begin{pmatrix} \sqrt{5} - 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \lambda \begin{pmatrix} \sqrt{5} + 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}$$

Für die Transformationsmatrix  $T$  ergibt sich:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} - 1 & \sqrt{5} + 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Wir invertieren die Matrix, klammern  $(-1)$  aus und erhalten:

$$T = \frac{1}{4\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 + \sqrt{5} \\ 2 & 1 - \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Jetzt können wir ausrechnen:

$$A^n = (T^{-1}DT)^n = T^{-1}D^nT = \begin{pmatrix} v & w \\ x & y \end{pmatrix}$$

Davon interessiert uns der Eintrag  $x$ , denn er ist das gesuchte  $f_n$ . Wir haben:

$$T^{-1} \cdot D^n \cdot T = \frac{1}{4\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{5}-1 & \sqrt{5}+1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1+\sqrt{5} \\ 2 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Durch Ausmultiplizieren erhalten wir also letztendlich:

$$f_n = x = \frac{1}{4\sqrt{5}}(4\alpha^n - 4\beta^n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

#### 4. Nullstellen über verschiedenen Körpern(wird korrigiert)

Bestimmen Sie die Nullstellen von  $p(x) = x^2 + 2$  als Polynom aus  $\mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x], \mathbb{F}_3[x], \mathbb{F}_7[x]$