

Mathematik für Informatiker III
(Frank Hoffmann)

Abgabe: bis Mittwoch, den 30. Januar 2008, 12¹⁵

1. **σ -Algebra** (2 Punkte)

- (a) Beweisen Sie, dass jede endliche σ -Algebra eine gerade Anzahl von Ereignissen hat.
- (b) Kann es eine solche Algebra mit genau 6 Ereignissen geben? Begründung!

2. **Ziehen ohne Zurücklegen, Hypergeometrische Verteilung I** (2+2 Punkte)

- (a) Aus einer Kiste mit N Kugeln, davon w weiße und s schwarze mit $w + s = N$, werden gleichzeitig (!) n Kugeln gezogen. Was ist die Wahrscheinlichkeit Pr_k , dass davon genau k weiß sind? Die Elementarereignisse sind also n -elementige (ungeordnete) Mengen, die wir als gleichverteilt annehmen.
Hinweis: Die Zahlen Pr_k heißen hypergeometrische Verteilung auf $\{0, \dots, n\}$.
- (b) Analysieren Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beim Skat jeder der 3 Spieler genau ein Ass bekommt, also im Skat das 4. Ass liegt.

3. **Hypergeometrisch II** (4 Punkte)

In einem Teich leben N Fische. Es werden $r = 1000$ Fische gefangen und rot markiert. Nach einer Weile (N hat sich nicht verändert) werden wieder $n = 2000$ Fische gefangen und nachgezählt, dass davon $k = 100$ rot sind. Wir nehmen wieder die Voraussetzungen der hypergeometrischen Verteilung an. Daraus kann man die Größe von N schätzen. Argumentieren Sie, dass $N = 2900$ und $N = 10^6$ unrealistisch sind. Der sogenannte Maximum-Likelihood-Schätzer beruht auf der Analyse von $\frac{Pr_k(N)}{Pr_k(N-1)}$ und benutzt dasjenige N^* , für welches $Pr_k(N^*)$ maximal ist. Tun Sie dies. Zeigen Sie dazu zunächst, dass der Quotient für $Nk < nr$ größer 1 ist und ansonsten kleiner als 1.

4. **False Positives** (2 Punkte)

Ein Krebstest liefert bei 96% der Untersuchten ein positives Ergebnis, falls diese tatsächlich Krebs haben, bei 94% ein negatives Ergebnis, falls diese keinen Krebs haben. Bei einem Patienten XYZ, in dessen Altersgruppe 0.5% aller Patienten Krebs haben, verläuft der Test positiv. Frage: Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass er tatsächlich Krebs hat?

5. **2 Modellierungen** (4 Punkte)

Wir betrachten einen Kreis mit Radius 1, in den ein gleichseitiges Dreieck einbeschrieben ist. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällige Sehne des Kreises länger ist als die Seitenlänge des Dreiecks?

- 1. Modellierung: Der Grundraum besteht aus allen geordneten Paaren (ϕ, ψ) mit $\phi, \psi \in [0, 2\pi)$ und $\psi \leq \phi$. Bestimmen Sie die Menge G der günstigen Elementarereignisse.

Gleichverteilung angenommen berechnet sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit als Fläche von G geteilt durch die Fläche des Grundraums.

2. Modellierung: Die Sehne ist durch ihren Mittelpunkt eindeutig festgelegt.

Tipp: Die günstigen Fälle haben etwas zu tun mit dem in das gleichseitige Dreieck eingeschriebenen Kreis.

6. **Unabhängigkeit** (2 Punkte)

Zwei faire Würfel werden gleichzeitig gespielt. Wir betrachten die 3 Ereignisse

A_1 = Der erste Würfel zeigt eine ungerade Augenzahl.

A_2 = Der zweite Würfel zeigt eine ungerade Augenzahl.

A_3 = Die Augensumme der zwei Würfel ist ungerade.

Untersuchen Sie diese Ereignisse auf paarweise bzw. auf totale Unabhängigkeit!

7. **Teilmuster** (2 Punkte) Sei P ein 0–1–String der Länge k . Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass P in einem zufälligen 0–1–String der Länge n nicht als Teilstring vorkommt, mit wachsendem n gegen 0 geht.

Hinweis: Schauen Sie sich nochmals die entsprechenden MafI I–Vorlesungen und Übungen an!

<http://www.inf.fu-berlin.de/lehre/WS06/mafi1/index.html>