

Mathematik für Informatiker III

(Frank Hoffmann)

von Hanne Hardering und Frank Hoffmann

1. Syndromdecodierung (3 Punkte)

Betrachten Sie den $(4, 2, 3)$ -Code über \mathbb{F}_3 im Skript S. 84. Decodieren Sie die folgenden erhaltenen Nachrichten mittels Syndromdecodierung:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wird korrigiert.

2. Aufgabenverteilung (2 Punkte)

Wieviele Möglichkeiten gibt es, 7 verschiedene Aufgaben so auf 4 Studenten zu verteilen, dass jeder wenigstens eine Aufgabe lösen muss, aber die schwierigste Aufgabe dem besten Studenten zugeordnet wird?

Die Anzahl der Möglichkeiten 7 Aufgaben auf 4 Studenten zu verteilen (zunächst ohne Nebenbedingungen), entspricht dem Zufallsexperiment 7mal aus einer Urne mit 4 unterscheidbaren Kugeln zu ziehen unter Beachtung der Reihenfolge und mit Zurücklegen. Diese Anzahl ist also $4^7 = 16384$.

Nun soll die schwierigste Aufgabe dem besten Studenten zugeordnet werden. Nachdem wir dies getan haben, entspricht die Anzahl der möglichen Verteilungen nur noch der Verteilung von 6 Aufgaben auf 4 Studenten, also $4^6 = 4096$.

Nun streichen wir von diesen 4096 Verteilungen all jene, bei denen ein Student keine Aufgabe zugewiesen bekommen hat. Zu diesem Zweck zählen wir die Möglichkeiten einen Studenten aus dreien auszuwählen (beachte: der beste Student hat auf jeden Fall eine Aufgabe), d.h. $\binom{3}{1} = 3$. Hat dieser Student keine Aufgabe, so müssen alle Aufgaben auf die übrigen Studenten verteilt sein. Dafür gibt es 3^6 mögliche Verteilungen. Insgesamt bleiben also $4^6 - \binom{3}{1}3^6 = 1909$ Verteilungsmöglichkeiten.

Im vorhergehenden Schritt, haben wir alle Möglichkeiten, bei welchen zwei Studenten keine Aufgaben erhielten, $\binom{2}{1} = 2$ mal abgezogen. Um dies zu korrigieren, addieren wir die fehlende Anzahl von Möglichkeiten nun wieder. Analog zum Vorgehen beim Abziehen, erhalten wir eine Gesamtzahl von $4^6 - \binom{3}{1}3^6 + \binom{3}{2}2^6 = 2101$ Möglichkeiten.

In den vorhergehenden zwei Schritten wurden nun aber alle Möglichkeiten, bei denen drei Studenten keine Aufgabe erhielten zunächst $\binom{3}{1} = 3$ mal abgezogen und dann wieder $\binom{3}{2} = 3$ mal addiert. Um dies zu korrigieren, gehen wir analog zum vorhergehenden Schritt vor und erhalten die endgültige Gesamtzahl von $4^6 - \binom{3}{1}3^6 + \binom{3}{2}2^6 - \binom{3}{3}1^6 = 2100$ Verteilungsmöglichkeiten, welche alle gegebenen Bedingungen erfüllen.

Wenn man auf das Mafl I–Wissen zurückgreift, geht es auch so: Wir addieren die Anzahl der surjektiven Zuordnungen von 6 unterscheidbaren Aufgaben auf 4 unterscheidbare Studenten (der beste macht also nicht nur die schwerste Aufgabe) und die Anzahl der surjektiven Zuordnungen von 6 unterscheidbaren Aufgaben auf 3 unterscheidbare Studenten (der beste hat also nur die schwerste Aufgabe). (vgl. Mafl I–Skript WS06/07, $S_{n,k}$ sind die Stirling–Zahlen)

$$4! \cdot S_{6,4} + 3! \cdot S_{6,3} = 24 \cdot 65 + 6 \cdot 90 = 2100$$

3. Analyse des Astragalus–Spiels (2 Punkte)

Modellieren Sie das in der Vorlesung besprochene Astragalus–Spiel mit 4 vierseitigen Würfeln. Die Seiten eines Würfels sind beschriftet mit 6,4,3,1 und haben die Wahrscheinlichkeiten 7%, 48%, 35% und 10%, dass sie beim einmaligen Würfeln fallen. Wieviele verschiedene Ergebnisse gibt es beim einmaligen Werfen 4 solcher Würfel, wenn man sie als unterscheidbar bzw. als nicht unterscheidbar ansieht?

Was ist der Erwartungswert für die erreichte Punktzahl und was die Varianz?

Sieht man die Würfel als unterscheidbar an, so entspricht das Würfeln von k Würfeln im Urnenmodell dem k -maligen Ziehen aus 4 Objekten mit Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge. Die Anzahl der unterschiedlichen Ergebnisse ist also 4^k . Bei vier Würfeln gibt es demnach $4^4 = 256$ mögliche Ergebnisse.

Sieht man die Würfel als nicht unterscheidbar an, so entspricht dies dem Ignorieren der Reihenfolge in obigen Urnenmodell. Die Anzahl der unterschiedlichen Ergebnisse ist dann $\binom{4-1+k}{k}$. Bei vier Würfeln gibt es demnach $\binom{7}{4} = 35$ mögliche Ergebnisse.

Betrachten wir zunächst einen Würfel:

Sei X die Zufallsvariable, welche einer Würfelseite ihren aufgeschriebenen Wert zuordnet. Für den Erwartungswert erhalten wir dann:

$$E(X) = \sum X(\omega)P(\omega) = 6 \cdot 0,07 + 4 \cdot 0,48 + 3 \cdot 0,35 + 1 \cdot 0,1 = 3,49$$

Die Varianz ist

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X - E(X))^2) \\ &= (6 - 3,49)^2 \cdot 0,07 + (4 - 3,49)^2 \cdot 0,48 + (3 - 3,49)^2 \cdot 0,35 + (1 - 3,49)^2 \cdot 0,1 \\ &= 1,2699 \end{aligned}$$

Betrachten wir das einmalige Werfen vierer solcher Würfel, so lassen sich diese als unabhängige Kopien des einen Würfels auffassen. Wir haben also unabhängige Zufallsvariablen X_1, X_2, X_3 und X_4 mit

$$E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = E(X_4) = 3,49$$

und

$$V(X_1) = V(X_2) = V(X_3) = V(X_4) = 1,2699$$

Für zwei Zufallsvariablen X und Y gilt stets $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$. Sind X und Y unabhängig, so gilt auch $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Die uns interessierende Zufallsvariable hat die Form $\tilde{X} = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$. Somit ist der Erwartungswert

$$E(\tilde{X}) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) = 13,96$$

und die Varianz

$$V(\tilde{X}) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + V(X_4) = 5,0796$$

4. **Bedingtes** (2 Punkte)

Vor Ihnen steht eine Kiste mit 5000 Chips, 1000 der Firma I und 4000 der Firma M. Von der ersten Sorte sind 10%, von der zweiten 5% defekt. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Chip defekt ist, wenn er von der Firma I stammt? Und was ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Chip von der Firma I ist, wenn er defekt ist?

Wird korrigiert.

5. **Siebformel** (4+4+2 Punkte)

- (a) Sei (Ω, \mathcal{F}, p) ein Wahrscheinlichkeitsraum und A_1, \dots, A_n Ereignisse. Beweisen Sie (Tipp: Vollständige Induktion) die sogenannte Siebformel, auch als Inklusions-Exklusions-Prinzip bekannt:

$$p\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n p(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} p(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} p\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)$$

- (b) Wir betrachten zufällige Permutationen x_1, \dots, x_n der Elemente $1, \dots, n$. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens ein i an der richtigen Stelle steht, das heißt $x_i = i$ gilt? Benutzen Sie die Siebformel und betrachten Sie Ereignisse A_i , die aus allen Permutationen mit $x_i = i$ bestehen.
- (c) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei den eben betrachteten Permutationen genau k der n Einträge an den richtigen Stellen stehen? Tipp: Betrachten Sie das Komplementärereignis zu Aufgabe b.

zu a) Wir benutzen vollständige Induktion:

Induktionsanfang:

$$p(A_1 \cup A_2) = p(A_1 \setminus A_2) + p(A_2 \setminus A_1) + p(A_1 \cap A_2)$$

Man beachte, dass rechts disjunkte Mengen stehen. Daraus folgt wegen $p(A \setminus B) = p(A) - p(A \cap B)$ die Behauptung.

$$p(A_1 \cup A_2) = p(A_1) - p(A_1 \cap A_2) + p(A_2) - p(A_1 \cap A_2) + p(A_1 \cap A_2)$$

Induktionsvoraussetzung: Behauptung richtig für n beliebige Ereignisse.

Induktionsschritt: Wir betrachten Ereignisse A_1, \dots, A_{n+1} . Nach Induktionsvoraussetzung gelten die folgenden beiden Gleichungen.

$$p\left(\bigcup_{i=2}^{n+1} A_i\right) = \sum_{i=2}^{n+1} p(A_i) - \sum_{2 \leq i < j \leq n+1} p(A_i \cap A_j) + \dots$$

$$p\left(\bigcup_{i=2}^{n+1} A_1 \cap A_i\right) = \sum_{i=2}^{n+1} p(A_1 \cap A_i) - \sum_{2 \leq i < j \leq n+1} p(A_1 \cap A_i \cap A_j) + \dots$$

Dies wird eingesetzt in die folgende Gleichung (gilt wegen Induktionsanfang!) und die Behauptung folgt.

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = p(A_1) + \sum_{i=2}^{n+1} p(A_i) - p\left(\bigcup_{i=2}^{n+1} A_1 \cap A_i\right)$$

zu b) Gesucht ist offensichtlich $p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$. Wir benutzen die Siebformel und brauchen insbesondere für $m \leq n$

$$p_m := \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_m} p(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m})$$

Wenn diese m Indices fixiert sind, kann man die restlichen $(n - m)$ Positionen beliebig permutieren. Damit ist

$$p_m = \binom{n}{m} \frac{(n - m)!}{n!} = \frac{1}{m!}$$

Und schließlich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$$

Man beachte, dass der Grenzwert $1 - e^{-1}$ ist, insbesondere ist die berechnete Summe der Beginn der Taylor-Entwicklung der Funktion $1 - e^{-1}$ an der Stelle -1.

zu c) Das ist jetzt einfach. Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten die k Stellen zu finden, die fixiert sind. Multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit, dass die restlichen $n - k$ Stellen keinen Fixpunkt haben. Das erhält man als Komplementwahrscheinlichkeit zu b) mit $n - k$ an Stelle von n .