

## 1. Determinanten I, Verständnis

a)  $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$  gilt, nicht, da man ein Gegenbeispiel findet:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = -1, \det(B) = -4$$

$$\det(A + B) = -9 \neq -1 - 4 = \det(A) + \det(B)$$

b) Auch  $\det(\lambda * A) = \lambda \det(A)$  ist eine falsche Aussage. Man betrachte wieder ein Gegenbeispiel:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \lambda = 3$$

$$\det(\lambda A) = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 3 = 3 * \det \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

c) Die Aussage  $\det(A(BC)) = \det((AB)C)$  ist hingegen wahr, da die Matrixmultiplikation assoziativ ist. Da innerhalb der Determinante diese Berechnung stattfindet hat es auch keinen Einfluss auf die Determinante selber.

d) Die Aussage  $\det(A) = 1 \Rightarrow A = E$  ist falsch. Es lassen sich nämlich auch noch andere Matrizen mit Determinante 1 finden, die nicht eine Einheitsmatrix sind, z.B.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

e) Die Aussage  $\det(A) = 1 \Rightarrow A$  gehört zur injektiven Abbildung  $K^n \rightarrow K^n$  ist wahr. Und zwar gilt unmittelbar aus  $\det(A) \neq 0$ , dass der Rang der Matrix voll ist, also  $rg(A) = n$ . Für Abbildungen gilt  $\dim A = \dim(Ker(f_A)) + rg(f_A)$ . Da der Rang von  $f_A$  wie gerade erläutert  $n$  ist, und der von der Matrix selber natürlich auch, muss demnach  $Ker(f_A) = 0$  sein. Das bedeutet, dass die Abbildung injektiv ist.

f) Das aus  $\det(A) = 1 \Rightarrow A$  gehört zur surjektiven Abbildung  $K^n \rightarrow K^n$  folgt ist richtig. Denn wenn  $\det(A) \neq 0$  muss der Rang der Matrix voll sein, also  $rg(A) = n$ . Der Rang der zugehörigen Abbildung ist also auch  $rg(f_A) = n$ . Der Rang einer linearen Funktion ist definiert also  $rg(f) = \dim(Im(f))$ . Das Bild von  $f_A$  muss also die Dimension  $n$  haben und ist somit voll. D.h. das ganze Bild wird getroffen, die Abbildung ist surjektiv.

## 2. Determinante II

a) Zuerst, eine Matrix mit Einsen auf der Nebendiagonale sieht für  $n=3$  so aus und wir im folgenden mit  $A_n$  bezeichnet:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für  $A_2$  kann die Determinante sehr leicht explizit berechnet werden und bildet für das folgende den Anker.

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Für  $n > 2$  entwickeln wir jetzt  $A_n$  nach Zeile 1 mit Hilfe des Entwicklungssatzes von Laplace um auf eine schöne Formel für die Determinante zu kommen.

$$\begin{aligned} \det(A_n) &= \sum_{i=1}^n a_{1,i}(-1)^{1+i} * \det(A_{1,i}) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} a_{1,i}(-1)^{1+i} * \det(A_{1,i})}_{=0, \text{ da } a_{1,i} \text{ nur } 1 \text{ bei } 1+i=1+n} + \underbrace{a_{1,n}}_{=1}(-1)^{1+n} * \underbrace{\det(A_{1,n})}_{=\det(A_{n-1})} \\ &= (-1)^{1+n} * \det(A_{n-1}) \end{aligned}$$

Jetzt kann also nach  $A_{n-1}$  iteriert werden usw.:

$$\begin{aligned} \det(A_n) &= (-1)^{1+n} * \det(A_{n-1}) \\ &= (-1)^{n+1} * ((-1)^n * \det(A_{n-2})) \\ &= (-1)^{n+1} * (-1)^n * ((-1)^{n-1} * \det(A_{n-3})) \\ &= \dots \\ &= (-1)^{n+1} * (-1)^n * \dots * (-1)^4 \underbrace{\det(A_2)}_{=-1} \\ \det(A_n) &= - \prod_{i=4}^{n+1} (-1)^i \end{aligned}$$

Wie man sieht, ist die Determinante also entweder 1 oder -1.

b)

### 3. Lineare Gleichungssysteme

a) Die Lösung des LGS soll mit der Cramerschen Regel bestimmt werden:

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = 12 - 6 + 24 - (8 - 8 + 27) = 3$$

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}}{3} = \frac{16 - 6 + 24 - (8 - 8 + 36)}{3} = \frac{-2}{3}$$

$$x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}}{3} = \frac{-12 - 12 - 8 - (-8 - 16 - 9)}{3} = \frac{1}{3}$$

$$x_3 = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}}{3} = \frac{6 - 4 + 24 - (8 - 4 + 18)}{3} = \frac{4}{3}$$

Die Lösung lautet also  $L = (\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ .

b) Die komplementäre Matrix berechnet sich mit der Formel  $\tilde{A} = \tilde{a}_{i,j} = (-1)^{i+j} \det A_{j,i}$ . Für die ersten Einträge wird explizit gerechnet, die anderen folgen analog.

$$\tilde{a}_{1,1} = (-1)^2 \det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = -2 * (-2) - 3 * 3 = -5$$

$$\tilde{a}_{1,2} = (-1)^3 \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = -(2 * (-2) - 4 * 3) = 16$$

$$\tilde{a}_{1,3} = (-1)^4 \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = 2 * 3 - 4 * (-2) = 14$$

Usw. es ergibt sich dann als komplementäre Matrix

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -5 & 16 & 14 \\ 1 & -2 & -1 \\ 4 & -11 & -10 \end{pmatrix}$$

Die inverse Matrix lässt sich jetzt berechnen durch

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)} * \tilde{A} \\ &= \frac{1}{3} * \begin{pmatrix} -5 & 16 & 14 \\ 1 & -2 & -1 \\ 4 & -11 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{3} & \frac{16}{3} & \frac{14}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{-11}{3} & \frac{-10}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da  $A * x = b$  ist, muss folglich  $x = A^{-1} * b$  sein:

$$\begin{pmatrix} \frac{-5}{3} & \frac{16}{3} & \frac{14}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{-11}{3} & \frac{-10}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Und siehe da, die Lösungen aus a) und b) stimmen überein.

## 4. Drehung und Basiswechsel

Als erstes baut man sich aus den beiden Drehmatrizen durch Multiplikation die Abbildungsmatrix.

$$A_y = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & 0 & -\sin \frac{\pi}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \frac{\pi}{6} & 0 & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$$

$$A_z = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} & 0 \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_f = A_y * A_z = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} & -\cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} & 0 \\ \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\cos \frac{\pi}{6} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$$

Um das Bild von  $(1, 2, 3)$  zu erhalten, muss man den Vektor also nur mit der Abbildungsmatrix multiplizieren.

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\cos \frac{\pi}{6} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} \frac{1}{\sqrt{2}} & -2 \cos \frac{\pi}{6} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 2 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 3 \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$$

Um jetzt die Koordinaten des Punktes  $(1, 2, -3)$  zu berechnen muss die Abbildung der Koordinaten gleich der Abbildung der Standardbasen auf den Punkt sein.

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\cos \frac{\pi}{6} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \cos \frac{\pi}{6} \frac{1}{\sqrt{2}} & -y \cos \frac{\pi}{6} \frac{1}{\sqrt{2}} & -z \frac{1}{2} \\ x \frac{1}{\sqrt{2}} & y \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ x \frac{1}{2\sqrt{2}} & -y \frac{1}{2\sqrt{2}} & z \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Das daraus resultierende LGS kann per Gauß-Verfahren gelöst werden.

$$\begin{pmatrix} x \cos \frac{\pi}{6} \frac{1}{\sqrt{2}} & -y \cos \frac{\pi}{6} \frac{1}{\sqrt{2}} & -z \frac{1}{2} \\ x \frac{1}{\sqrt{2}} & y \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ x \frac{1}{2\sqrt{2}} & -y \frac{1}{2\sqrt{2}} & z \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} I - \cos \frac{\pi}{6} III \\ II - 2III \end{matrix} \begin{pmatrix} x \cos \frac{\pi}{6} \frac{1}{\sqrt{2}} & -y \cos \frac{\pi}{6} \frac{1}{\sqrt{2}} & -z \frac{1}{2} \\ 0 & 2y \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{6} & -z \frac{1}{2} \\ 0 & 2y \frac{1}{\sqrt{2}} & -2z \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 2 \cos \frac{\pi}{6} \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$II - \cos \frac{\pi}{6} III \begin{pmatrix} x \cos \frac{\pi}{6} \frac{1}{\sqrt{2}} & -y \cos \frac{\pi}{6} \frac{1}{\sqrt{2}} & -z \frac{1}{2} \\ 0 & 2y \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{6} & -z \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -z \frac{1}{2} + 2z \cos^2 \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 2 \cos \frac{\pi}{6} \\ 1 - 10 \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$$

$$z = \frac{1 - 10 \cos \frac{\pi}{6}}{-0,5 + 2 \cos^2 \frac{\pi}{6}} = 1 - 10 \cos \frac{\pi}{6}$$

Und so weiter und so fort ...