

1. Konvexe Hülle, Fläche

a) Das Volumen kann berechnet werden durch

$$V = \frac{1}{6} * \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

Als erstes berechnen wir die Determinante durch die Laplace-Entwicklung nach der 1. Spalte

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{i=1}^4 a_{i,1} (-1)^{i+1} \det A_{i,1} \\ &= 1 * \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + (-3) \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 0 * \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1) \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 1 * (2 + 3 - (2 - 6)) + (-3)(2 - 3 - (1 + 6)) + 0 + (-1)(6 + 2 - (-6 + 4)) \\ &= -3 + 24 - 10 \\ &= 11 \end{aligned}$$

Demnach ergibt sich für das Volumen dann $V = \frac{11}{6}$.

b) Als erstes ist der Schwerpunkt zu berechnen

$$S = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{3} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Jetzt wird die Fläche des von p_1, p_2, S aufgespannten Dreieckes berechnet:

$$A_1 = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{2}{3} \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \left(\frac{2}{3} - 2 \right) \right| = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Und jetzt die des Dreiecks p_1, p_2, p_3 :

$$A_2 = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} |(2 - 6)| = \frac{4}{2} = 2$$

Und es gilt tatsächlich $3A_1 = A_2$.

2. Inverse einer ganzzahligen Matrix

Es müssen hier Hin- und Rückrichtung gezeigt werden.

\Rightarrow Seien A und B ganzzahlige Matrizen, dann müssen auch die Determinanten ganzzahlig sein. Es gilt $A * B = E$, also auch $\det(A * B) = \det A * \det B = \det E = 1$. Demnach muss $\det A = \frac{1}{\det B}$ sein. Da die Determinante aber ganzzahlig sein muss, muss $|\det B| = 1$ und somit auch $|\det A| = 1$.

\Leftarrow Sei A eine ganzzahlige Matrix mit $|\det A| = 1$. Dann gilt für $A * B = \det(A * B) = \det A * \det B = 1 * \det B = \det E = 1$. Also muss $\det B = 1$ sein.

3. Erhard Schmidt

Es wird nach Erhard Schmidt Verfahren die orthonormale Basis von U bestimmt. Dazu reicht es die Basisvektoren von U umzuwandeln.

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 3^2 + 3^2}} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{6} \\ \frac{-3}{6} \\ \frac{3}{6} \\ \frac{3}{6} \end{pmatrix} \\
 \tilde{u}_2 &= \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\rangle * \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} - \left(\frac{5}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2} + \frac{7}{2} \right) * \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} - \frac{24}{2} * \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -12 \\ -12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$u_2 = \frac{\tilde{u}_2}{\|\tilde{u}_2\|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_3 &= \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \left[\left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\rangle * \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\rangle * \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \left[(-2 + 1 + 3) * \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + (2 - 1 + 3) * \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} \frac{-2}{2} \\ \frac{-2}{2} \\ \frac{2}{2} \\ \frac{2}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{2} \\ \frac{4}{2} \\ \frac{2}{2} \\ \frac{4}{2} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$u_3 = \frac{\tilde{u}_3}{\|\tilde{u}_3\|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{3^2 + (-3)^2 + (-3)^2 + 3^2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Die orthonormale Basis sieht nun wie folgt aus

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

4. Orthogonalprojektion

Als erstes werden wieder die orthonormalisierten Vektoren berechnet.

$$u_1 = \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \begin{pmatrix} \frac{-4}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_2 &= \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-4}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \right\rangle * \begin{pmatrix} \frac{-4}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} - \left(\frac{-32}{5} - \frac{18}{5} \right) \begin{pmatrix} \frac{-4}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{40}{5} \\ 0 \\ -\frac{30}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ u_2 &= \frac{\tilde{u}_2}{\|\tilde{u}_2\|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{3^2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit ist dann die Projektionsmatrix

$$\begin{pmatrix} \frac{-4}{5} & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe der Vektoren können jetzt die Bilder der Standardbasisvektoren berechnet werden.

$$\begin{aligned} p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-4}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \right\rangle * \begin{pmatrix} \frac{-4}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-4}{5} * \begin{pmatrix} \frac{-4}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{25} \\ 0 \\ \frac{-12}{25} \end{pmatrix} \\ p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-4}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \right\rangle * \begin{pmatrix} \frac{-4}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 1 * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \right\rangle * \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{3}{5} * \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{12}{25} \\ 0 \\ \frac{9}{25} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Jetzt werden die Winkel zwischen den gerade berechneten Vektoren berechnet.

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha &= \frac{\left\langle \begin{pmatrix} \frac{16}{25} \\ 0 \\ -\frac{12}{25} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} \frac{16}{25} \\ 0 \\ -\frac{12}{25} \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ \\
 \cos \beta &= \frac{\left\langle \begin{pmatrix} \frac{16}{25} \\ 0 \\ -\frac{12}{25} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{12}{25} \\ 0 \\ \frac{9}{25} \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} \frac{16}{25} \\ 0 \\ -\frac{12}{25} \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} -\frac{12}{25} \\ 0 \\ \frac{9}{25} \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\frac{-192}{625} - \frac{108}{625}}{\sqrt{\left(\frac{16}{25}\right)^2 + \left(-\frac{12}{25}\right)^2} \sqrt{\left(-\frac{12}{25}\right)^2 + \left(\frac{9}{25}\right)^2}} \\
 &= \frac{-\frac{12}{25}}{\frac{12}{25}} = -1 \Rightarrow \beta = 180^\circ \\
 \cos \gamma &= \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -\frac{12}{25} \\ 0 \\ \frac{9}{25} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} -\frac{12}{25} \\ 0 \\ \frac{9}{25} \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} = 0 \Rightarrow \gamma = 90^\circ
 \end{aligned}$$

5. Skalarprodukt und Winkel