

Mathematik für Informatiker III
(Frank Hoffmann)

Abgabe: bis Mittwoch, den 14. November 2007, 12¹⁵

1. **Paarweise Unabhängigkeit** (2 Punkte)

Gegeben seien 3 Vektoren x, y, z im \mathbb{R}^3 , die paarweise linear unabhängig sind. Folgt daraus, dass $\{x, y, z\}$ insgesamt unabhängig ist? Beweis oder Gegenbeispiel.

2. **Unterraum und Dimension** (6 Punkte)

Im reellen Vektorraum \mathbb{R}^4 seien die folgenden Unterräume gegeben:

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$$

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0\}$$

Bestimmen Sie jeweils eine Basis und die Dimension von $U, W, U \cap W, U + W$.

3. **Matrix einer linearen Abbildung I** (4 Punkte)

Gegeben Sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = (2\alpha - \gamma, \alpha + \beta - 2\gamma).$$

Bestimmen Sie die zu f gehörige Matrix bezüglich der Basen

$$\{(5, 2, -7), (3, 2, 0), (1, -1, 3)\} \text{ und } \{(1, 2), (2, 1)\}$$

4. **Matrix einer linearen Abbildung II** (8 Punkte)

Es sei V der Vektorraum der reellen Polynome mit $\text{Grad} \leq 2$ und $B_1 = \{1, x, x^2\}$, $B_2 = \{1, x + 1, (x + 1)^2\}$ zwei Basen dieses Raums. Weiterhin sei $f : V \rightarrow W$ der Endomorphismus (also $W = V$), der als lineare Fortsetzung der Abbildung $f(1) = 1, f(x) = x + 1, f(x^2) = (x + 1)^2$

entsteht. Bestimmen Sie die Matrizen der Abbildung f , wenn

- a) B_1 als Basis von V und von W angenommen wird;
- b) B_1 als Basis von V und B_2 als Basis von W angenommen wird;
- c) B_2 als Basis von V und B_1 als Basis von W angenommen wird;
- d) B_2 als Basis von V und von W angenommen wird.