

1. Paarweise Unabhängigkeit

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ und $x = (1, 0, 0), y = (0, 1, 0), z = (1, 1, 0)$. Diese drei Vektoren sind paarweise linear unabhängig, wie man leicht sieht. Wie man zudem aber auch sehr schnell sieht, sind alle drei Vektoren nicht insgesamt linear unabhängig, da z als Linearkombination von $x + y$ gebildet werden kann.

2. Unterraum und Dimension

Die Dimension eines Unterraums V lässt sich durch die Formel $\dim V = n - \text{rg}(V)$ berechnen, wobei n die Dimension des Oberraums ist und rg die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen im zugehörigen LGS.

Demnach gilt für $\dim U = \dim \mathbb{R}^4 - 1 = 4 - 1 = 3$. Jetzt muss also die Basis 3 Vektoren umfassen. Man rät nun für die Gleichung $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$, die alle Vektoren erfüllen müssen, drei passende, die linear unabhängig sind.

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Für W nun das gleiche Spiel: $\dim W = \dim \mathbb{R}^4 - \text{rg}(W) = 4 - 2 = 2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Hieraus ergibt sich dann ein schönes LGS

$$I \quad x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$II \quad 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$$

$$I + 2II \quad 7x_1 - 5x_3 + x_4 = 0 \quad \Rightarrow x_4 = 5x_3 - 7x_1$$

$$x_1 - 2x_2 - x_3 + 3 * (5x_3 - 7x_1) = 0$$

$$-20x_1 - 2x_2 + 14x_3 = 0$$

Jetzt werden wieder Lösungen geraten, die die Gleichungen erfüllen

$$B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

$U \cap W$ bedeutet, dass sowohl die Gleichung von U , sowie die von W erfüllt werden müssen. Demnach gilt $\dim U \cap W = \dim \mathbb{R}^4 - \operatorname{rg}(U \cap W) = 4 - 3 = 1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Hieraus bekommt man wieder ein schönes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} I \quad x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ II \quad x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ III \quad 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \\ I' = II - I \quad 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ II' = 3I + II \quad 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2I' - II' \quad 9x_2 - 8x_3 &= 0 \Rightarrow x_2 = \frac{8}{9}x_3 \\ 2x_1 + 2 * \left(\frac{8}{9}x_3\right) - 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 - \frac{11}{9} &= 0 \Rightarrow x_1 = \frac{11}{18}x_3 \\ \frac{11}{18}x_3 - \frac{8}{9}x_3 + x_3 - x_4 &= 0 \Rightarrow x_4 = \frac{13}{18}x_3 \end{aligned}$$

Wie man erkennt, sind alle Werte von x_3 abhängig. Für unsere Basis nehmen wir einfach $x_3 = 1$ an:

$$B_{U \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{11}{18} \\ \frac{8}{9} \\ 1 \\ \frac{13}{18} \end{pmatrix} \right\}$$

3. Matrix einer linearen Abbildung I

Es ist die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch $f(\alpha, \beta, \gamma) = (2\alpha - \gamma, \alpha + \beta - 2\gamma)$ gegeben. Nun soll bezüglich der Basen $\{(5, 2, -7), (3, 2, 0), (1, -1, 3)\}$ und $\{(1, 2), (2, 1)\}$ die Matrix gebildet werden. Dazu wird auf jeden Basisvektor aus \mathbb{R}^3 f angewendet, so dass wir das Ergebnis als Linearkombination der Basisvektoren von \mathbb{R}^2 darstellen können. Die sich dabei

ergebenden Koeffizienten bilden dann die Matrix.

$$f(5, 2, -7) = a_{11}(1, 2) + a_{21}(2, 1)$$

$$\Rightarrow (17, 21) = a_{11}(1, 2) + a_{21}(2, 1)$$

$$17 = a_{11} + 2a_{21}$$

$$\Rightarrow a_{11} = 17 - 2a_{21}$$

$$21 = 2a_{11} + a_{21}$$

$$\Rightarrow 21 = 2(17 - 2a_{21}) + a_{21} = 34 - 3a_{21}$$

$$a_{21} = \frac{13}{3}$$

$$a_{11} = \frac{25}{3}$$

$$f(3, 2, 0) = a_{12}(1, 2) + a_{22}(2, 1)$$

$$\Rightarrow (6, 5) = a_{12}(1, 2) + a_{22}(2, 1)$$

$$6 = a_{12} + 2a_{22}$$

$$\Rightarrow a_{12} = 6 - 2a_{22}$$

$$5 = 2a_{12} + a_{22}$$

$$\Rightarrow 5 = 2 * (6 - 2a_{22}) + a_{22} = 12 - 3a_{22}$$

$$a_{22} = \frac{7}{3}$$

$$a_{12} = \frac{4}{3}$$

$$f(1, -1, 3) = a_{13}(1, 2) + a_{23}(2, 1)$$

$$\Rightarrow (-1, -6) = a_{13}(1, 2) + a_{23}(2, 1)$$

$$-1 = a_{13} + 2a_{23}$$

$$\Rightarrow a_{13} = -1 - 2a_{23}$$

$$-6 = 2a_{13} + a_{23}$$

$$\Rightarrow -6 = 2 * (-1 - 2a_{23}) + a_{23} = -2 - 3a_{23}$$

$$a_{23} = \frac{4}{3}$$

$$a_{13} = \frac{-11}{3}$$

Die Matrix sieht dann so aus

$$A = \begin{pmatrix} \frac{25}{3} & \frac{4}{3} & \frac{-11}{3} \\ \frac{13}{3} & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

4. Matrix einer linearen Abbildung II

Die Matrizen werden wieder nach dem selben Prinzip wie in Nr. 3 gebildet.

a) $B_1 = \{1, x, x^2\}$ wird als Basis von V und W angenommen.

$$\begin{aligned}f(1) &= a_{11} + xa_{21} + x^2a_{31} \\ \Rightarrow 1 &= a_{11} + xa_{21} + x^2a_{31} \\ a_{11} &= 1 \quad a_{21} = a_{31} = 0 \\ f(x) &= a_{11} + xa_{21} + x^2a_{31} \\ \Rightarrow x + 1 &= a_{12} + xa_{22} + x^2a_{32} \\ a_{12} &= a_{22} = 1 \quad a_{32} = 0 \\ f(x^2) &= a_{13} + xa_{23} + x^2a_{33} \\ \Rightarrow (x + 1)^2 &= a_{13} + xa_{23} + x^2a_{33} \\ x^2 + 2x + 1 &= a_{13} + xa_{23} + x^2a_{33} \\ a_{13} &= a_{33} = 1 \quad a_{23} = 2\end{aligned}$$

Die Matrix ergibt sich dann als

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $B_1 = \{1, x, x^2\}$ wird als Basis von V und $B_2 = \{1, x + 1, (x + 1)^2\}$ als Basis von W angenommen.

$$\begin{aligned}f(1) &= a_{11} + (x + 1)a_{21} + (x + 1)^2a_{31} \\ \Rightarrow 1 &= a_{11} + (x + 1)a_{21} + (x + 1)^2a_{31} \\ a_{11} &= 1 \quad a_{21} = a_{31} = 0 \\ f(x) &= a_{11} + (x + 1)a_{21} + (x + 1)^2a_{31} \\ \Rightarrow x + 1 &= a_{12} + (x + 1)a_{22} + (x + 1)^2a_{32} \\ a_{12} &= a_{32} = 0 \quad a_{22} = 1 \\ f(x^2) &= a_{13} + (x + 1)a_{23} + (x + 1)^2a_{33} \\ \Rightarrow (x + 1)^2 &= a_{13} + (x + 1)a_{23} + (x + 1)^2a_{33} \\ a_{13} &= a_{23} = 0 \quad a_{33} = 1\end{aligned}$$

Die Matrix ergibt sich dann als

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $B_1 = \{1, x, x^2\}$ wird als Basis von W und $B_2 = \{1, x+1, (x+1)^2\}$ als Basis von V angenommen.

$$\begin{aligned}
 f(1) &= a_{11} + xa_{21} + x^2a_{31} \\
 \Rightarrow 1 &= a_{11} + xa_{21} + x^2a_{31} \\
 a_{11} &= 1 \quad a_{21} = a_{31} = 0 \\
 f(x+1) &= a_{11} + xa_{21} + x^2a_{31} \\
 f(x) + f(1) &= a_{11} + xa_{21} + x^2a_{31} \\
 \Rightarrow x+2 &= a_{12} + xa_{22} + x^2a_{32} \\
 a_{12} &= 2 \quad a_{22} = 1 \quad a_{32} = 0 \\
 f((x+1)^2) &= a_{13} + xa_{23} + x^2a_{33} \\
 f(x^2 + 2x + 1) &= a_{13} + xa_{23} + x^2a_{33} \\
 f(x^2) + 2f(x) + f(1) &= a_{13} + xa_{23} + x^2a_{33} \\
 \Rightarrow (x+1)^2 + 2(x+1) + 1 &= a_{13} + xa_{23} + x^2a_{33} \\
 x^2 + 2x + 1 + 2x + 2 + 1 &= a_{13} + xa_{23} + x^2a_{33} \\
 x^2 + 4x + 4 &= a_{13} + xa_{23} + x^2a_{33} \\
 a_{13} &= a_{23} = 4 \quad a_{33} = 1
 \end{aligned}$$

Die Matrix ergibt sich dann als

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) $B_2 = \{1, (x+1), (x+1)^2\}$ wird als Basis von W und V angenommen.

$$\begin{aligned}
 f(1) &= a_{11} + (x+1)a_{21} + (x+1)^2a_{31} \\
 \Rightarrow 1 &= a_{11} + (x+1)a_{21} + (x+1)^2a_{31} \\
 a_{11} &= 1 \quad a_{21} = a_{31} = 0 \\
 f(x+1) &= a_{11} + (x+1)a_{21} + (x+1)^2a_{31} \\
 f(x) + f(1) &= a_{11} + (x+1)a_{21} + (x+1)^2a_{31} \\
 \Rightarrow x+2 &= a_{12} + (x+1)a_{22} + (x+1)^2a_{32} \\
 a_{12} &= a_{22} = 1 \quad a_{32} = 0 \\
 f((x+1)^2) &= a_{13} + (x+1)a_{23} + (x+1)^2a_{33} \\
 f(x^2 + 2x + 1) &= a_{13} + (x+1)a_{23} + (x+1)^2a_{33} \\
 f(x^2) + 2f(x) + f(1) &= a_{13} + (x+1)a_{23} + (x+1)^2a_{33} \\
 \Rightarrow (x+1)^2 + 2(x+1) + 1 &= a_{13} + (x+1)a_{23} + (x+1)^2a_{33} \\
 a_{13} &= a_{33} = 1 \quad a_{23} = 2
 \end{aligned}$$

Die Matrix ergibt sich dann als

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$