

Mathematik für Informatiker III
(Frank Hoffmann)

Abgabe: bis Mittwoch, den 31. Oktober 2007, 12¹⁵

1. Grundsätzliches

- (a) Wir definieren für reelle Zahlen die folgende 2-stellige Operation

$$x \circ y = x^2 + 5y$$

Ist diese Operation assoziativ, kommutativ oder besitzt sie ein neutrales Element?

- (b) Zeigen Sie, dass die Menge der Permutationen über einer endlichen Menge zusammen mit der üblichen Funktionskomposition eine Gruppe bilden. Ist diese abelsch?
- (c) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ zusammen mit der üblichen Multiplikation und Addition von reellen Zahlen einen Körper bilden.

2. Endliche Körper

Lösen Sie die Gleichung

$$2 \cdot x + 3 = 1$$

einmal über dem Körper \mathbb{Z}_5 und einmal über dem Körper \mathbb{Z}_7

3. Axiome

Beweisen Sie aus den Axiomen für Vektorräume, dass für alle Vektoren x gilt:

$$(-1) \cdot x = -x$$

4. **Unterräume I** (5 Punkte) V bezeichne den Vektorraum der stetigen Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} über dem Körper \mathbb{R} , dabei werden Addition von Funktionen und Multiplikation mit Skalaren punktweise auf den Funktionswerten definiert.

Welche der folgenden Teilmengen sind Unterräume von V ?

$$A = \{f \in V \mid f(-1) = f(1)\}$$

$$B = \{f \in V \mid f(-1) = -f(1)\}$$

$$C = \{f \in V \mid (f(-1))^2 = (f(1))^2\}$$

$$D = \{f \in V \mid f \text{ ist monoton wachsend}\}$$

$$E = \{f \in V \mid f \text{ ist monoton wachsend oder monoton fallend}\}$$

Natürlich gehört zu jeder Antwort eine kurze Begründung, insbesondere sind negative Antworten durch konkrete Beispiele zu belegen.

5. Unterräume II (2+1+2 Punkte)

- (a) Seien U_1 und U_2 Teilräume eines Vektorraumes V mit $U_1 \cup U_2 = V$. Zeigen Sie, dass dann gilt: $U_1 = V$ oder $U_2 = V$.
- (b) Zeigen Sie, dass für K -Vektorräume U, V gilt: $V \cap U$ und $V + U = \{v + u | v \in V, u \in U\}$ sind K -Vektorräume.
- (c) Wir betrachten K^3 als K -Vektorraum und sei $\alpha \in K$. Zeigen Sie, dass $U_\alpha = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 + x_2 + x_3 = \alpha\}$ Unterraum genau dann ist, wenn $\alpha = 0$ ist.

Hinweis: Aufgaben 1 - 3 werden im erstem Tutorium besprochen, Aufgaben 4 und 5 sind abzugeben und werden korrigiert.