

1. Gruppe von Matrizen

Um zu zeigen, dass es sich bei $((a, 0), (0, b))$ mit $a, b \in \{-1, 1\}$ tatsächlich um eine Gruppe handelt, müssen folgende Eigenschaften gezeigt werden:

Assoziativität Es muss gelten $A * (B * C) = (A * B) * C$.

$$\begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} a'' & 0 \\ 0 & b'' \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a''' & 0 \\ 0 & b''' \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a''a''' & 0 \\ 0 & b''b''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a''a'''a' & 0 \\ 0 & b''b'''b' \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a'' & 0 \\ 0 & b'' \end{pmatrix} \right) * \begin{pmatrix} a''' & 0 \\ 0 & b''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'a'' & 0 \\ 0 & b'b'' \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a''' & 0 \\ 0 & b''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'a''a''' & 0 \\ 0 & b'b''b''' \end{pmatrix}$$

Da recht- und linksseitiger Wert übereinstimmen, ist die Menge assoziativ.

Existenz eines neutralen Element Es muss gelten $A * E = A$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Dies gilt für

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a * 1 & 0 \\ 0 & b * 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Da $E \in \text{Menge}$, gibt es ein neutrales Element.

Existenz der inversen Elemente Es muss gelten $A * A^{-1} = E$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dies gilt für

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a * \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & b * \frac{1}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da das inverse zu -1 wieder -1 ist und zu 1 1 , bleibt man auch immer in der Menge, es existieren also die inversen Elemente.

Da alle drei Kriterien der Gruppe erfüllt sind, handelt es sich bei der Menge um eine Gruppe bezüglich der Matrizenmultiplikation.

2. Matrixprodukt

Durch ausprobieren könnte man vermuten, dass sich für

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt. Man führt einen Beweis per Induktion über n , um die Vermutung zu beweisen.

Induktionsanfang Für $n = 1$ ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Das ist eine wahre Aussage.

Induktionsschritt Da

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt, soll auch

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gelten.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

3. Matrixtyp

Die gesuchte Matrix muss eine 2×3 Matrix sein, wir haben also 6 Unbekannte.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aus den ersten Matrizen ergibt sich

$$\begin{pmatrix} x_1 + 4y_1 & x_2 + 4y_2 & x_3 + 4y_3 \\ 2x_1 + 5y_1 & 2x_2 + 5y_2 & 2x_3 + 5y_3 \\ 3x_1 + 6y_1 & 3x_2 + 6y_2 & 3x_3 + 6y_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Und wenn man noch weiter multipliziert

$$\begin{pmatrix} x_1 + 4y_1 + x_3 + 4y_3 & x_2 + 4y_2 \\ 2x_1 + 5y_1 + 2x_3 + 5y_3 & 2x_2 + 5y_2 \\ 3x_1 + 6y_1 + 3x_3 + 6y_3 & 3x_2 + 6y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hieraus folgt unmittelbar folgendes LGS:

$$\begin{aligned}
 I \quad x_1 + 4y_1 + x_3 + 4y_3 &= 0 & \Rightarrow x_1 &= -4y_1 - x_3 - 4y_3 \\
 II \quad 2x_1 + 5y_1 + 2x_3 + 5y_3 &= 0 \\
 III \quad 3x_1 + 6y_1 + 3x_3 + 6y_3 &= 0 \\
 IV \quad x_2 + 4y_2 &= 0 & \Rightarrow x_2 &= -4y_2 \\
 V \quad 2x_2 + 5y_2 &= 0 & 2(-4y_2) + 5y_2 = 3y_2 = 0 & \Rightarrow y_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \\
 VI \quad 3x_2 + 6y_2 &= 0 \\
 \Rightarrow II \quad 2(-4y_1 - x_3 - 4y_3) + 5y_1 + 2x_3 + 5y_3 &= 0 \\
 -8y_1 - 2x_3 - 8y_3 + 5y_1 + 2x_3 + 5y_3 &= 0 \\
 -3y_1 - 3y_3 &= 0 \\
 &\Rightarrow y_1 = -y_3 \\
 &\Rightarrow x_1 = -4y_1 - x_3 + 4y_1 = -x_3
 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich als Lösungsmenge

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & 0 & -x_1 \\ y_1 & 0 & -y_1 \end{pmatrix} \mid x_1, y_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

4. Geometrisches

Aus $B_\psi * A_\phi$ folgt wie in der Vorlesung besprochen

$$\begin{aligned}
 B_\psi * A_\phi &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ \sin \psi & -\cos \psi \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi + \sin \psi \sin \phi & -\sin \phi \cos \psi + \sin \psi \cos \phi \\ \sin \psi \cos \phi - \cos \psi \sin \phi & -\sin \psi \sin \phi - \cos \psi \cos \phi \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Aus den Additionstheoremen folgt

$$= \begin{pmatrix} \cos(\psi - \phi) & \sin(\psi - \phi) \\ \sin(\psi - \phi) & -\cos(\psi - \phi) \end{pmatrix}$$

, Geometrisch bedeutet das, dass die Matrix an einer Achse gespiegelt wird, die zu der x -Achse in einem Winkel von $\frac{\psi - \phi}{2}$ steht.

Und für $B_\psi * B_\phi$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
 B_\psi * B_\phi &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ \sin \psi & -\cos \psi \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi + \sin \psi \sin \phi & \cos \psi \sin \phi - \sin \psi \cos \phi \\ \sin \psi \cos \phi - \cos \psi \sin \phi & \sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \phi \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Aus den Additionstheoremen folgt

$$= \begin{pmatrix} \cos(\psi - \phi) & \sin(\psi - \phi) \\ \sin(\psi - \phi) & \cos(\psi - \phi) \end{pmatrix}$$

Hier könnte man geometrisch eventuell sagen, dass die Ebene bzw. deren Basisvektoren durch $\frac{\psi-\phi}{2}$ zusammengedrückt wird.

Als inverse Matrix ergibt sich für A durch Zeilenumformung

$$\begin{array}{lcl}
 & \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 I * \cos \phi + II * \sin \phi \rightarrow & \begin{pmatrix} \overbrace{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi}^{=1} & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 -I * \sin \phi + II \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos \phi \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\cos \phi \sin \phi & \underbrace{-\sin^2 \phi + 1}_{=\cos^2 \phi} \end{pmatrix} \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Damit ist also die inverse Matrix

$$A_{\phi}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

Nun zur inversen Matrix von B_{ψ} :

$$\begin{array}{lcl}
 & \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ \sin \psi & -\cos \psi \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 I * \cos \psi + II * \sin \psi \rightarrow & \begin{pmatrix} \overbrace{\cos^2 \psi + \sin^2 \psi}^{=1} & 0 \\ \sin \psi & -\cos \psi \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 -I * \sin \psi + II \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\cos \psi \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\cos \psi \sin \psi & \underbrace{-\sin^2 \psi + 1}_{=\cos^2 \psi} \end{pmatrix} \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ \sin \psi & -\cos \psi \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Es ergibt sich also

$$B_{\psi}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ \sin \psi & -\cos \psi \end{pmatrix}$$

B_{ψ} ist also zu sich selbst invers.

5. Inverse Matrix

Durch Zeilenumformung wird aus der ursprünglichen Matrix die Einheitsmatrix gebildet, durch die gleichen Umformungen entsteht dabei aus der Einheitsmatrix die inverse Matrix.

$$\begin{array}{l}
 \begin{pmatrix} 1,5 & -1 & 3 & 2,5 \\ 3 & -2 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -2 & -5 \\ 6 & -4 & 4 & 15 \end{pmatrix} \\
 II + III \rightarrow \begin{pmatrix} 1,5 & -1 & 3 & 2,5 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & -5 \\ 6 & -4 & 4 & 15 \end{pmatrix} \\
 2I + III \rightarrow \begin{pmatrix} 1,5 & -1 & 3 & 2,5 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 6 & -4 & 4 & 15 \end{pmatrix} \\
 4I - IV \rightarrow \begin{pmatrix} 1,5 & -1 & 3 & 2,5 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -5 \end{pmatrix} \\
 2I - II \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -5 \end{pmatrix} \\
 III - II \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -5 \end{pmatrix} \\
 4I - 6III \rightarrow \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -5 \end{pmatrix} \\
 2III - IV \rightarrow \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\
 I - 4IV \rightarrow \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\
 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} -4 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} -4 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} -4 & 10 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Nun macht man noch hübsch die Probe und rechnen $A * A^{-1}$ aus

$$1,5 * \frac{-1}{3} + (-1) * 0 + 3 * \frac{1}{2} + 2,5 * 0 = 1$$

$$1,5 * \frac{5}{6} + (-1) * \frac{-1}{2} + 3 * \frac{-1}{4} + 2,5 * \frac{-2}{5} = 0$$

$$1,5 * \frac{-1}{3} + (-1) * \frac{-1}{2} + 3 * 0 + 2,5 * 0 = 0$$

$$1,5 * \frac{-1}{3} + (-1) * 0 + 3 * 0 + 2,5 * \frac{1}{5} = 0$$

$$3 * \frac{-1}{3} + (-2) * 0 + 2 * \frac{1}{2} + 5 * 0 = 0$$

$$3 * \frac{5}{6} + (-2) * \frac{-1}{2} + 2 * \frac{-1}{4} + 5 * \frac{-2}{5} = 1$$

$$3 * \frac{-1}{3} + (-2) * \frac{-1}{2} + 2 * 0 + 5 * 0 = 0$$

$$3 * \frac{-1}{3} + (-2) * 0 + 2 * 0 + 5 * \frac{1}{5} = 0$$

$$-3 * \frac{-1}{3} + 0 * 0 + (-2) * \frac{1}{2} + (-5) * 0 = 0$$

$$-3 * \frac{5}{6} + 0 * \frac{-1}{2} + (-2) * \frac{-1}{4} + (-5) * \frac{-2}{5} = 0$$

$$-3 * \frac{-1}{3} + 0 * \frac{-1}{2} + (-2) * 0 + (-5) * 0 = 1$$

$$-3 * \frac{-1}{3} + 0 * 0 + (-2) * 0 + (-5) * \frac{1}{5} = 0$$

$$6 * \frac{-1}{3} + (-4) * 0 + 4 * \frac{1}{2} + 15 * 0 = 0$$

$$6 * \frac{5}{6} + (-4) * \frac{-1}{2} + 4 * \frac{-1}{4} + 15 * \frac{-2}{5} = 0$$

$$6 * \frac{-1}{3} + (-4) * \frac{-1}{2} + 4 * 0 + 15 * 0 = 0$$

$$6 * \frac{-1}{3} + (-4) * 0 + 4 * 0 + 15 * \frac{1}{5} = 1$$