

Mathematik für Informatiker III
(Frank Hoffmann)

Abgabe: bis Mittwoch, den 07. November 2007, 12¹⁵

1. **Vektorraum I** (2 Punkte)

Bestimmen Sie alle Unterräume des \mathbb{Z}_2 -Vektorraums \mathbb{Z}_2^3 .

2. **Vektorräume II** (2+2+2 Punkte)

Die folgende Konstruktion ist eine weitere Möglichkeit, Vektorräume zu “bauen”. Sie gibt es in ähnlicher Form für andere algebraischen Strukturen (z.Bsp. Gruppen).

Sei V ein K -Vektorraum und U ein Unterraum. Wir definieren auf der Menge $V/U = \{v + U \mid v \in V\}$ der sogenannten Nebenklassen von U eine Vektorraumstruktur (der sogenannte *Quotientenvektorraum*). Beachten Sie, dass die Nebenklassen selbst wieder Mengen sind, nämlich $v + U = \{v + u \mid u \in U\}$. Wir definieren Addition von Nebenklassen und Multiplikation mit einem Skalar auf kanonische Art:

$$(v + U) + (w + U) = (v + w) + U, \quad \lambda(v + U) = \lambda v + U$$

- (a) Zeigen Sie, dass diese Operationen wohldefiniert sind, das heißt, nicht von der Wahl des Repräsentanten v der Nebenklasse $v + U$ abhängen und dass man einen K -Vektorraum erhält.
- (b) Beschreiben Sie die Vektorräume V/V und $V/\{\vec{0}\}$. Beschreiben Sie geometrisch die Elemente von \mathbb{R}^2/U und U sei aufgespannt durch den Vektor $(1, 2)$.
- (c) Zeigen Sie, dass gilt: $\dim V/U = \dim V - \dim U$.

3. **Gleiche Unterräume** (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Unterräume des \mathbb{Z}_5^4 gleich sind. Beschreiben Sie zunächst kurz, wie Sie vorgehen.

$$\text{Lin}(\{(2, 1, 0, 4), (3, 3, 2, 1)\}) \quad \text{Lin}(\{(2, 0, 2, 4), (2, 3, 1, 4)\})$$

Welche Dimension hat dieser Unterraum?

4. **Lineare Abbildung** (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert mittels

$$f(x, y) = (x - y, 0, y - x)$$

linear ist. Geben Sie Kern und das Bild von f an. Was sind deren Dimension?

5. **Verständnis** (1+2+1+2+1 Punkte)

- (a) Warum ist \mathbb{R}^2 zusammen mit der komponentenweisen Addition und Multiplikation kein Körper?
- (b) Richtig oder falsch? Für Unterräume V_1, V_2, V_3 eines Vektorraum V gilt :

$$V_1 + (V_2 \cap V_3) = (V_1 \cap V_2) + (V_1 \cap V_3)$$

- (c) Richtig oder falsch? Eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen gleicher endlicher Dimension ist genau dann injektiv, wenn sie surjektiv ist. Begründung!
- (d) Sei $f : V \rightarrow W$ eine surjektive lineare Abbildung und $\dim V = 6, \dim W = 2$. Was können Sie über die Dimension des Kerns der Abbildung sagen?
- (e) Die Menge \mathbb{R} kann man auffassen als \mathbb{R} -Vektorraum, aber auch als \mathbb{Q} -Vektorraum. Was sind deren Dimensionen? Begründung!