

Mathematik für Informatiker III  
(Frank Hoffmann)

1. **Paarweise Unabhängigkeit**

Gegeben seien 3 Vektoren  $x, y, z$  im  $\mathbb{R}^3$ , die paarweise linear unabhängig sind. Folgt daraus, dass  $\{x, y, z\}$  insgesamt unabhängig ist? Beweis oder Gegenbeispiel.

**Lösung:** Obwohl es scheinbar plausibel ist, folgt es natürlich nicht. Die Vektoren  $x = (1, 0, 0)$ ,  $y = (1, 1, 0)$ ,  $z = (0, 1, 0)$  sind paarweise unabhängig aber nicht als Tripel, denn  $x + z = y$ .

2. **Unterraum und Dimension**

Im reellen Vektorraum  $\mathbb{R}^4$  seien die folgenden Unterräume gegeben:

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$$

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0\}$$

Bestimmen Sie jeweils eine Basis und die Dimension von  $U, W, U \cap W, U + W$ .

Wird korrigiert.

3. **Matrix einer linearen Abbildung I**

Gegeben Sei die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  durch

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = (2\alpha - \gamma, \alpha + \beta - 2\gamma).$$

Bestimmen Sie die zu  $f$  gehörige Matrix bezüglich der Basen

$$\{(5, 2, -7), (3, 2, 0), (1, -1, 3)\} \text{ und } \{(1, 2), (2, 1)\}$$

Wird korrigiert.

4. **Matrix einer linearen Abbildung II**

Es sei  $V$  der Vektorraum der reellen Polynome mit  $\text{Grad} \leq 2$  und  $B_1 = \{1, x, x^2\}$ ,  $B_2 = \{1, x + 1, (x + 1)^2\}$  zwei Basen dieses Raums. Weiterhin sei  $f : V \rightarrow W$  der Endomorphismus (also  $W = V$ ), der als lineare Fortsetzung der Abbildung  $f(1) = 1, f(x) = x + 1, f(x^2) = (x + 1)^2$

entsteht. Bestimmen Sie die Matrizen der Abbildung  $f$ , wenn

- a)  $B_1$  als Basis von  $V$  und von  $W$  angenommen wird;
- b)  $B_1$  als Basis von  $V$  und  $B_2$  als Basis von  $W$  angenommen wird;
- c)  $B_2$  als Basis von  $V$  und  $B_1$  als Basis von  $W$  angenommen wird;
- d)  $B_2$  als Basis von  $V$  und von  $W$  angenommen wird.

**Lösung:**(Autor:D.Kroushkov) Nachfolgend wird mehr gelöst als eigentlich verlangt, insbesondere zum Thema Basistransformationen, siehe

<http://www.inf.fu-berlin.de/lehre/WS07/mafi3/muster03-4.pdf>