

## 1. Syndromdecodierung

Zur Vergegenwärtigung Prüf- und Generatormatrix:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

In liegen folgende acht Vektoren, durch die die Syndrome bestimmt werden:

$$B_1(\vec{0}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Durch Multiplikation der Prüfmatrix mit diesen Vektoren erhält man dann die Syndrome, hier verkürzt nur als Tabelle aufgeführt:

Vektor	Syndrom
(1, 0, 0, 0)	(1, 2)
(2, 0, 0, 0)	(2, 1)
(0, 1, 0, 0)	(1, 1)
(0, 2, 0, 0)	(2, 2)
(0, 0, 1, 0)	(1, 0)
(0, 0, 2, 0)	(2, 0)
(0, 0, 0, 1)	(0, 1)
(0, 0, 0, 2)	(0, 2)

Um von den erhaltenen Nachrichten nun wieder auf das Codewort zu kommen, rechnet man mit  $H * v$  das Syndrom aus und kommt über das Syndrom dann zur codierten Nachricht.

$$H * v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H * v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H * v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 2. Aufgabenverteilung

Man nimmt die Aufgaben und die Studenten als unterscheidbar an. Da der beste schonmal die schwerste Aufgabe bekommt, bleiben noch 6 Aufgaben übrig. Als erstes muss man dafür sorgen, dass also die übrigen drei Studenten jeweils eine Aufgabe bekommen. Dafür gibt es ja  $6 * 5 * 4$  Möglichkeiten. Es bleiben noch drei Aufgaben übrig, diese können jetzt beliebig verteilt werden, d.h. für jede der drei Aufgaben kann auf einen der vier Studenten verteilt werden. Also  $4^3$ . Insgesamt ergibt sich also als Anzahl der Möglichkeiten

$$6 * 5 * 4 * 4^3 = 7680$$

## 3. Analyse des Astragalus-Spiels

Wenn die Würfel als unterscheidbar angesehen werden, dann gibt es für jeden Würfel 4 Möglichkeiten, also  $4^4 = 256$ . Bei nicht unterscheidbaren Würfeln kann man es mit Hilfe der

Zahlpartition mit 0 als zugelassenem Summand berechnen:  $\binom{4+4-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$ .  
Der Erwartungswert der Zufallsvariable  $X = \text{Augenzahl}$  bei einem Würfel ergibt sich als

$$E(X) = 6 * 0,07 + 4 * 0,48 + 3 * 0,35 + 1 * 0,1 = 3,49$$

Entsprechend für vier Würfel ist es dann das vierfache, also  $4 * E(X) = 13,96$ . Die Varianz für einen Wurf lässt sich berechnen über

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= 6^2 * 0,07 + 4^2 * 0,48 + 3^2 * 0,35 + 1^2 * 0,1 - (3,49)^2 \\ &= 13,45 - 12,1801 = 1,2699 \end{aligned}$$

Entsprechend für vier Würfe also  $4 * V(X) = 5,0796$ .

## 4. Bedingtes

Die Ereignisse sind  $D$  Chip ist defekt,  $I$  Chip von Firma I und  $M$  Chip von Firma M. Dabei ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Chip von Firma I kommt bzw. vom M durch die Aufgabe gegeben als

$$\begin{aligned} Pr(I) &= \frac{1}{5} \\ Pr(M) &= \frac{4}{5} \\ Pr(I \cap D) &= 0,1 \\ Pr(M \cap D) &= 0,05 \end{aligned}$$

Es ist jetzt die bedingte Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass ein Chip defekt ist, wenn er von Firma I gefertigt wurde

$$Pr(D|I) = \frac{Pr(D \cap I)}{Pr(I)} = \frac{0,1}{\frac{1}{5}} = 0,5$$

Und jetzt ist noch die bedingte Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass ein Chip von I kommt, wenn er defekt ist. Dazu benötigen wir natürlich erstmal die gesamte Wahrscheinlichkeit für einen Defekt. Das geht per totaler Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} Pr(D) &= Pr(D|I) * Pr(I) + Pr(D|M) * Pr(M) \\ &= Pr(D \cap I) + Pr(D \cap M) \\ &= 0,1 + 0,05 = 0,15 \\ Pr(I|D) &= \frac{Pr(I \cap D)}{Pr(D)} = \frac{0,1}{0,15} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

## 5. Siebformel

b) Die Wahrscheinlichkeit, für das Ereignis  $A_i$ , dass alle Permutationen umfasst, wo das  $i$ te Element an der richtigen Position steht, berechnet sich wie folgt: Und zwar ist für die  $i$ te Position das Element vorgegeben, für alle übrigen  $n - 1$  sind sie beliebig. Insgesamt gibt es ja genau  $n!$  mögliche Permutationen, demnach ist also  $Pr(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!}$ . Wenn jetzt also genau zwei Positionen der Permutationen stimmen sollen, dann sind also genau zwei der  $n$  Plätze vorgegeben. Hierfür also dann  $Pr(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!}$  usw. für beliebige Anzahlen an korrekten Plätzen. Wenn alle richtig belegt sein sollen, ergibt sich natürlich  $Pr(\bigcap_{i=1}^n A_i) = \frac{1}{n!}$ . Um jetzt die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass mindestens ein Element am richtigen Index  $i$  steht, kann man das ganze in die Formel für die Inklusion-Exklusion einsetzen:

$$\begin{aligned} Pr\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n Pr(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} Pr(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} Pr\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{(n-1)!}{n!}}_{=\frac{1}{n}} - \underbrace{\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(n-2)!}{n!}}_{\binom{n}{2} \text{ Möglichkeiten}} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} \\ &= n * \frac{1}{n} - \binom{n}{2} \frac{(n-2)!}{n!} + \binom{n}{3} \frac{(n-3)!}{n!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} \\ &= 1 - \frac{n!}{2!(n-2)!} \frac{(n-2)!}{n!} + \frac{n!}{3!(n-3)!} \frac{(n-3)!}{n!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} \\ &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

Wie man leicht erkennt, ist das sowas ähnliches wie die Subfakultät. ( $!n = n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}$ ). Aber leider nur so ähnlich, ansonsten könnte man wunderbar das näherungsweise berechnen über  $\frac{n!}{e}$  ...

Aber vielleicht tut es auch ein guter alter Schätzwert, die ersten fünf Summanden ergeben die Größenordnung von 61,7% und da die Fakultät bekanntlich sehr schnell wächst, werden sich alle weiteren Summanden immer weniger bemerkbar machen.