

Mathematik für Informatiker III
(Frank Hoffmann)

von Hanne Hardering

1. **Gruppe von Matrizen** (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgende Menge von Matrizen über \mathbb{R} bezüglich der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Wird korrigiert.

2. **Matrixprodukt** (2 Punkte)

Bestimmen Sie für positive $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

Wird korrigiert.

3. **Matrixtyp** (5 Punkte)

Von welchem Typ muss die Matrix X über \mathbb{R} sein, damit die folgende Gleichung sinnvoll ist. Bestimmen Sie dann die Menge aller Matrizen, die dieser Gleichung genügen.

Hinweis: Auf der rechten Seite der Gleichung steht die 3×2 -Nullmatrix.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = O_{3 \times 2}$$

Wird korrigiert.

4. **Geometrisches** (4 Punkte)

Sei wie in der Vorlesung besprochen A_ϕ die zu einer Drehung um den Winkel ϕ in der Ebene gehörende Matrix aus $M(2 \times 2, \mathbb{R})$, B_ψ die Matrix der Spiegelung an der Geraden durch den Ursprung mit Anstiegswinkel $\psi/2$.

Berechnen Sie und interpretieren Sie geometrisch die Produkte $B_\psi \cdot A_\phi$ und $B_\psi \cdot B_\phi$. Was sind die inversen Matrizen zu A_ϕ bzw. B_ψ ?

Lösung:

Es ist

$$A_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad B_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ \sin \psi & -\cos \psi \end{pmatrix}$$

Berechne $B_\psi \cdot A_\phi$:

$$\begin{aligned} B_\psi \cdot A_\phi &= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi + \sin \psi \sin \phi & -\cos \psi \sin \phi + \sin \psi \cos \phi \\ \sin \psi \cos \phi - \cos \psi \sin \phi & -\sin \psi \sin \phi - \cos \psi \cos \phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\psi - \phi) & \sin(\psi - \phi) \\ \sin(\psi - \phi) & -\cos(\psi - \phi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt aufgrund der Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen.

Geometrisch ist die Hintereinanderausführung einer Drehung um den Winkel ϕ und einer Spiegelung an der Gerade durch den Ursprung mit dem Anstiegswinkel $\psi/2$ wieder eine Spiegelung und zwar an der Gerade durch den Ursprung mit dem Anstiegswinkel $\frac{\psi - \phi}{2}$.

Berechne $B_\psi \cdot B_\phi$:

$$\begin{aligned} B_\psi \cdot B_\phi &= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi + \sin \psi \sin \phi & \cos \psi \sin \phi - \sin \psi \cos \phi \\ \sin \psi \cos \phi - \cos \psi \sin \phi & \sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\psi - \phi) & \sin(\phi - \psi) \\ \sin(\psi - \phi) & \cos(\psi - \phi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\psi - \phi) & -\sin(\psi - \phi) \\ \sin(\psi - \phi) & \cos(\psi - \phi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichung gilt aufgrund der Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen. Die letzte Gleichung gilt aufgrund der Punktsymmetrie der Sinusfunktion. Geometrisch ist die Hintereinanderausführung einer Spiegelung an der Gerade mit Anstiegswinkel $\phi/2$ und einer Spiegelung an der Gerade durch den Ursprung mit dem Anstiegswinkel $\psi/2$ eine Drehung und zwar um den Winkel $\psi - \phi$.

Berechne A_ϕ^{-1} :

Berechne dazu zunächst die Determinante von A_ϕ :

$$\det A_\phi = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$$

Berechne nun A_ϕ^{-1} :

$$A_\phi^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos -\phi & -\sin -\phi \\ \sin -\phi & \cos -\phi \end{pmatrix}$$

Die letzte Gleichheit gilt aufgrund der Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen. Zu diesem Ergebnis kann man durch geometrische Interpretation kommen, da eine Drehung um den Winkel ϕ durch eine Drehung um den Winkel $-\phi$ invertiert wird.

Berechne B_ψ^{-1} :

Berechne dazu zunächst die Determinante von B_ψ :

$$\det B_\psi = -\cos^2 \psi - \sin^2 \psi = -1$$

Berechne nun B_ψ^{-1} :

$$B_\psi^{-1} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} -\cos \psi & -\sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ \sin \psi & -\cos \psi \end{pmatrix}$$

Auch zu diesem Ergebnis kann man durch geometrische Interpretation kommen, da eine Spiegelung an der Gerade durch den Ursprung mit Anstiegswinkel $\psi/2$ durch eine Rückspiegelung an der gleichen Gerade invertiert wird.

5. Inverse Matrix (6 Punkte)

Berechnen Sie mittels Zeilenumformungen die inverse Matrix zu

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 3 & \frac{5}{2} \\ 3 & -2 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -2 & -5 \\ 6 & -4 & 4 & 15 \end{pmatrix}.$$

Machen Sie auch die Probe!

Lösung:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 3 & \frac{5}{2} \\ 3 & -2 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -2 & -5 \\ 6 & -4 & 4 & 15 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Subtrahiere das Doppelte der 1. Zeile von der 2.

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & -5 \\ 6 & -4 & 4 & 15 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multipliziere die 2. Zeile mit $-\frac{1}{4}$ und vertausche sie mit der 3.

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 3 & \frac{5}{2} \\ -3 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 4 & 15 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Addiere das Doppelte der 1. Zeile zur 2.

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 3 & \frac{5}{2} \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 4 & 15 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Subtrahiere das 4-fache der 1. Zeile von der 4.

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 3 & \frac{5}{2} \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Addiere das 8-fache der 3. Zeile zur 4.

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 3 & \frac{5}{2} \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multipliziere die 4. Zeile mit $\frac{1}{5}$ und subtrahiere das 4-fache der 3. Zeile von der 2.

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 3 & \frac{5}{2} \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Multipliziere die 2. Zeile mit $-\frac{1}{2}$ und subtrahiere das $\frac{5}{2}$ -fache der 4. Zeile von der 1.

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Addiere die 2. und subtrahiere das 3-fache der 3. zur 1. Zeile.

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Multipliziere die 1. Zeile mit $\frac{2}{3}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Probe:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 3 & \frac{5}{2} \\ 3 & -2 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -2 & -5 \\ 6 & -4 & 4 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} & \frac{5}{4} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} - 1 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ -1 + 1 & \frac{5}{2} + 1 - \frac{1}{2} - 2 & -1 + 1 & -1 + 1 \\ 1 - 1 & -\frac{5}{2} + \frac{1}{2} + 2 & 1 & 1 - 1 \\ -2 + 2 & 5 + 2 - 1 - 6 & -2 + 2 & -2 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$