

Mathematik für Informatiker III
(Frank Hoffmann)

Abgabe: bis Mittwoch, den 19. Dezember 2007, 12¹⁵

1. **Isometrie** (2+2 Punkte)

- (a) Sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle x, x \rangle = x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$. Beweisen Sie, dass die Matrix

$$A = E - 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} (x_1, \dots, x_n)$$

orthogonal ist, dass heißt, eine Isometrie definiert.

- (b) Seien U, V Unterräume gleicher Dimension in einem euklidischen Vektorraum W . Zeigen Sie, dass es eine Isometrie $f : U \rightarrow V$ gibt.

2. **Eigenwerte** (2+4+2 Punkte)

- (a) Sei f ein Automorphismus. Welche Zusammenhänge bestehen zwischen den Eigenwerten und den Eigenvektoren von f und f^{-1} ?
- (b) Betrachten Sie den Endomorphismus von \mathbb{R}^3 mit der Standardbasis, der gegeben ist durch die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume.

- (c) Gesucht ist eine 2×2 -Matrix A , deren Eigenwerte -1 und 2 sind mit den dazugehörigen Eigenvektoren $(1, 1)$ und $(5, 2)$.

3. **Fibonacci-Zahlen** (6 Punkte)

Sei $f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-2} + f_{n-1}, n > 1$ die Folge der Fibonacci-Zahlen. Ziel ist es, die folgende Formel von Binet zu beweisen:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Finden Sie zunächst eine 2×2 -Matrix A , so dass für $n > 0$:

$$A^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie dann eine Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ mit $\alpha > \beta$ und die dazugehörige Transformationsmatrix T mit $A = T^{-1} \cdot D \cdot T$. Jetzt können Sie A^n bestimmen und sollten dann die Formel herleiten können.

4. **Nullstellen über verschiedenen Körpern** (2 Punkte)

Bestimmen Sie die Nullstellen von $p(x) = x^2 + 2$ als Polynom aus $\mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x], \mathbb{F}_3[x], \mathbb{F}_7[x]$