

Teilmusterlösung - erste, vierte und fünfte Aufgabe

Martin C. Götze

3. Dezember 2007

Aufgabe 1. Schreiben Sie die folgende (3×3) -Matrix als Produkt von Elementarmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Wir verwenden den Algorithmus von Gauss und notieren die Elementaroperationen, die wir durchführen stets durch die Elementarmatrizen. Wir verwenden nur Zeilenoperationen, d. h. unsere Elementarmatrizen operieren von links.

$$\begin{array}{ccc|c}
 1 & 0 & -1 & \\
 3 & 1 & -3 & K_{2,1,-3} \\
 1 & 2 & -2 & \\
 \hline
 1 & 0 & -1 & \\
 0 & 1 & 0 & \\
 1 & 2 & -2 & K_{3,1,-1} \\
 \hline
 1 & 0 & -1 & \\
 0 & 1 & 0 & \\
 0 & 2 & -1 & K_{3,2,-2} \\
 \hline
 1 & 0 & -1 & \\
 0 & 1 & 0 & \\
 0 & 0 & -5 & S_{3,-\frac{1}{5}} \\
 \hline
 1 & 0 & -1 & K_{1,3,1} \\
 0 & 1 & 0 & \\
 0 & 0 & 1 & \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & \\
 0 & 1 & 0 & \\
 0 & 0 & 1 &
 \end{array}$$

Nun müssen wir noch das Ergebnis ablesen, es ist

$$A = K_{2,1,3} \cdot K_{3,1,1} \cdot K_{3,2,2} \cdot S_{3,-5} \cdot K_{1,3,-1}$$

eine Darstellung von A als Produkt von Elementarmatrizen.

Aufgabe 4. Sei $U \subseteq K^n$ ein Vektorraum und $x \in K^n$. Zeigen Sie, dass es ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbekannten gibt, das als Lösungsmenge genau $x + U$ hat.

Sei $\dim U = k \leq n$ und $B = (v_1, \dots, v_k)$ eine Basis von U . Ergänze zu einer Basis $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ des K^n . Jedes Element $v \in K^n$ besitzt dann eine eindeutige Darstellung $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$. Dabei hängen die v_i linear von v ab. Die grundlegende Idee des weiteren Vorgehens ist nun folgende: Die Elemente von U sind doch schon durch die ersten k Basisvektoren darstellbar, d. h. es ist wegen der Eindeutigkeit der Darstellung in einer Basis

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \in U \iff \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0.$$

Wir haben also die Elemente von U durch das „Nullsein“ gewisser von v linear abhängiger Koeffizienten charakterisiert, das ist der erste Schritt auf dem Weg zu einem linearen Gleichungssystem, den wir nun weiter verfolgen werden.

Also: Wir konstruieren uns zunächst Funktionen $\varphi_i : K^n \rightarrow K$, die uns für jedes $v \in K^n$ die v_i -Komponente λ_i in der Darstellung der oben gewählten Basis geben. Dazu nutzen wir den Satz über die lineare Fortsetzung, definiere also $\varphi_i : K^n \rightarrow K$ für $1 \leq i \leq n$ durch

$$\varphi_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

(nota bene: Die φ_i heißen die zu v_i „duale Basis“). Für $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ ist nun

$$\varphi_i(v) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_i(v_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \delta_{ij} = \lambda_i,$$

d. h. die Funktionale leisten das gewünschte. Wir können nun also U wie folgt beschreiben:

$$U = \{v \in K^n \mid \varphi_i(v) = 0, i = k+1, \dots, n\}$$

Nun müssen wir diese $n - k$ Gleichungen für U nur noch als lineares Gleichungssystem schreiben. Sei also $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i = (y_1, \dots, y_n) \in K^n$, wobei e_i die Standardbasis bezeichne, dann ist mit $a_{ij} := \varphi_i(e_j)$ für $1 \leq i, j \leq n$ gerade

$$\begin{aligned} \varphi_i(y) &= \varphi_i \left(\sum_{j=1}^n y_j e_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \varphi_i(e_j) y_j \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \end{aligned}$$

Wir haben also jetzt

$$U = \left\{ (y_1, \dots, y_n) \in K^n \mid \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j = 0, i = k+1, \dots, n \right\}$$

das ist eine Beschreibung von U als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems mit $n - k$ Gleichungen und n Unbekannten. Schreibe nun das gegebene $x \in K^n$ als $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ und setze $b_i := \varphi_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ für $1 \leq i \leq n$. Nun ist doch für $y \in K^n$:

$$\begin{aligned} y \in x + U &\iff y - x \in U \\ &\iff \sum_{j=1}^n a_{ij}(y_j - x_j) = 0, \quad i = k+1, \dots, n \\ &\iff \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, \quad i = k+1, \dots, n \\ &\iff \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j = b_i \end{aligned}$$

D. h. $x + U$ ist Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j = b_i, \quad i = k+1, \dots, n$$

aus $n - k$ Gleichungen. Um n Gleichungen zu erhalten, füge noch k Gleichungen $0 = 0$ hinzu.

Aufgabe 5. Eine lineare Abbildung $f_A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ sei gegeben durch

$$f_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

- (i) Bestimmen Sie je eine Basis vom Kern und vom Bild der Abbildung!
- (ii) Welche Dimension hat der von den Vektoren $f_A((1, 2, 0, 1)^t)$ und $f_A((2, 1, -1, 3)^t)$ erzeugte Bildraum?
- (i) Um eine Basis von Bild und Kern von f_A zu bestimmen, bringen wir A durch Anwendung des Gaußschen Algorithmus auf Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 1 & 0 & 1 & \\ 1 & -1 & 2 & 0 & \rightsquigarrow \text{II} - \text{I} \\ -1 & 3 & -2 & 1 & \rightsquigarrow \text{III} + \text{I} \\ 1 & 5 & 1 & 3 & \rightsquigarrow \text{IV} - \text{I} \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & \\ 0 & -2 & 2 & -1 & \\ 0 & 4 & -2 & 2 & \rightsquigarrow \text{III} + 2\text{II} \\ 0 & 4 & 1 & 2 & \rightsquigarrow \text{IV} + 2\text{II} \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & \\ 0 & -2 & 2 & -1 & \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \\ 0 & 0 & 5 & 0 & \rightsquigarrow \text{IV} - \frac{5}{2}\text{III} \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & \\ 0 & -2 & 2 & -1 & \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

Also: Die Stufenspalten sind die erste, die zweite und die dritte Spalte, daher bilden die entsprechenden Spalten von A eine Basis von $\text{im } f_A$, d. h. es ist

$$\text{im } f_A = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Auch eine Basis des Kerns können wir oben ablesen, setzen wir $x_4 = 2$, so ergibt sich aus der vorletzten Zeile $x_3 = 0$, aus der drittletzten folgt dann $x_2 = -1$, also $x_1 = -1$ aus der ersten Zeile. Da der Kern nach dem Dimensionssatz eindimensional ist, ist also $(-1, -1, 0, 2)^t$ eine Basis des Kerns.

- (ii) Sei brevitatis causa $v_1 := (1, 2, 0, 1)^t$ und $v_2 := (2, 1, -1, 3)^t$ gesetzt. Wir haben mit $U := \text{span}\{v_1, v_2\}$ doch $\dim f_A(U)$ zu bestimmen, nach dem Dimensionssatz ist

$$\begin{aligned} \dim f_A(U) &= \dim U - \dim(U \cap \ker f_A) \\ &= \dim U - \dim U - \dim \ker f_A + \dim(U + \ker f_A) \\ &= \dim(U + \ker f_A) - \dim \ker f_A \\ &= \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} - 1 \end{aligned}$$

Es bleibt also der Rang zu bestimmen, es ist (wieder mit Gauss):

$$\begin{array}{ccc|l} 1 & 2 & -1 & \\ 2 & 1 & -1 & \rightsquigarrow \text{II} - 2\text{I} \\ 0 & -1 & 0 & \\ 1 & 3 & 1 & \rightsquigarrow \text{IV} - \text{I} \\ \hline 1 & 2 & -1 & \\ 0 & -3 & 1 & \rightsquigarrow \text{III} \\ 0 & -1 & 0 & \rightsquigarrow \text{II} - 3\text{III} \\ 0 & 1 & 2 & \rightsquigarrow \text{IV} + \text{III} \\ \hline 1 & 2 & -1 & \\ 0 & -1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 2 & \rightsquigarrow \text{IV} - 2\text{III} \\ \hline 1 & 2 & -1 & \\ 0 & -1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

Der Rang ist also drei, damit folgt

$$\dim f_A(U) = 3 - 1 = 2.$$