

Mathematik für Informatiker III
(Frank Hoffmann)

1. Vektorraum I

Bestimmen Sie alle Unterräume des \mathbb{Z}_2 -Vektorraums \mathbb{Z}_2^3 .

Lösung: Sei $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ die Standardbasis. Die 2^3 verschiedenen Untermengen erzeugen 8 Unterräume. Weitere Unterräume können nur Dimension 1 oder 2 haben. Wir beschreiben deren Basen mit Hilfe der e_i .

Dimension 1: $\{e_1 + e_2\}, \{e_1 + e_3\}, \{e_2 + e_3\}, \{e_1 + e_2 + e_3\}$ erzeugen Unterräume, die jeweils nur aus zwei Vektoren bestehen, denn jeder Vektor ist hier sein eigenes additives Inverses.

Dimension 2: $\{e_1 + e_2, e_3\}, \{e_1 + e_3, e_2\}, \{e_2 + e_3, e_1\}, \{e_1 + e_2, e_2 + e_3\}$ sind Basen, die paarweise verschiedene Unterräume mit jeweils 4 Vektoren erzeugen. Man beachte außerdem, dass $\{e_1 + e_2, e_2 + e_3\}, \{e_1 + e_3, e_3 + e_2\}, \{e_2 + e_1, e_3 + e_1\}$ alle denselben Vektorraum erzeugen.

Mithin gibt es 16 Unterräume des \mathbb{Z}_2 -Vektorraums \mathbb{Z}_2^3 .

2. Vektorräume II

Die folgende Konstruktion ist eine weitere Möglichkeit, Vektorräume zu "bauen". Sie gibt es in ähnlicher Form für andere algebraischen Strukturen (z.Bsp. Gruppen).

Sei V ein K -Vektorraum und U ein Unterraum. Wir definieren auf der Menge $V/U = \{v + U \mid v \in V\}$ der sogenannten Nebenklassen von U eine Vektorraumstruktur (der sogenannte *Quotientenvektorraum*). Beachten Sie, dass die Nebenklassen selbst wieder Mengen sind, nämlich $v + U = \{v + u \mid u \in U\}$. Wir definieren Addition von Nebenklassen und Multiplikation mit einem Skalar auf kanonische Art:

$$(v + U) + (w + U) = (v + w) + U, \quad \lambda(v + U) = \lambda v + U$$

- (a) Zeigen Sie, dass diese Operationen wohldefiniert sind, das heißt, nicht von der Wahl des Repräsentanten v der Nebenklasse $v + U$ abhängen und dass man einen K -Vektorraum erhält:

Sei $v + U = v' + U$ und $w + U = w' + U$. Zu zeigen ist: $(v + w) + U = (v' + w') + U$. Es gibt aber Elemente $a, b \in U$ mit $v = v' + a$ und $w = w' + b$. Damit ist

$$(v + w) + U = \{v' + w' + a + b + u \mid u \in U\}$$

Aber $a + b + u$ ist wieder in U und jedes $u' \in U$ lässt sich so darstellen.

$$(v + w) + U = \{v' + w' + a + b + u \mid u \in U\} = \{v' + w' + u' \mid u' \in U\} = (v' + w') + U$$

Die Axiome eines K -Vektorraums zu überprüfen sollte klar sein, man beachte aber insbesondere, dass U der Nullvektor in V/U ist und $-(v + U) = (-v) + U$.

- (b) Beschreiben Sie die Vektorräume V/V und $V/\{\vec{0}\}$. Beschreiben Sie geometrisch die Elemente von \mathbb{R}^2/U und U sei aufgespannt durch den Vektor $(1, 1)$:
 V/V besteht nur aus einem Element, also der Null-Vektorraum. Dagegen ist $V/\{\vec{0}\}$ fast dasselbe wie (isomorph zu) V , der Quotientenraum besteht aus Nebenklassen, jede Nebenklasse hat die Form $\{v\}$, V besteht aus den Vektoren v .
 In \mathbb{R}^2/U entspricht U der Gerade mit Anstieg 1 durch den Punkt $(0, 0)$, die anderen Nebenklassen $(x, y) + U$ sind Parallelverschiebungen dieser Gerade, genauer: $(x, y) + U$ ist die Gerade mit Anstieg 1 durch den Punkt (x, y) .
- (c) Zeigen Sie, dass gilt: $\dim V/U = \dim V - \dim U$:
 Man betrachte den Epimorphismus $\pi : V \rightarrow V/U$ definiert durch $\pi(v) = v + U$.
 Offensichtlich ist $\ker(\pi) = U$ und $\text{Im}(\pi) = V/U$. Die Behauptung folgt dann aus der Dimensionsformel für lineare Abbildungen. $\dim \ker(\pi) + \dim \text{Im}(\pi) = \dim V$.

3. Gleiche Unterräume

Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Unterräume des \mathbb{Z}_5^4 gleich sind. Beschreiben Sie zunächst kurz, wie Sie vorgehen.

$$\text{Lin}(\{(2, 1, 0, 4), (3, 3, 2, 1)\}) \quad \text{Lin}(\{(2, 0, 2, 4), (2, 3, 1, 4)\})$$

Welche Dimension hat dieser Unterraum?

Wird korrigiert.

4. Lineare Abbildung

Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert mittels

$$f(x, y) = (x - y, 0, y - x)$$

linear ist. Geben Sie Kern und das Bild von f an. Was sind deren Dimension?

Lösung: Zu zeigen

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, (x, y), (z, w) \in \mathbb{R}^2 : f(\alpha(x, y) + \beta(z, w)) = \alpha f(x, y) + \beta f(z, w)$$

Aber das ist klar:

$$\begin{aligned} f(\alpha(x, y) + \beta(z, w)) &= f(\alpha x + \beta z, \alpha y + \beta w) = (\alpha x + \beta z - \alpha y - \beta w, 0, \alpha y + \beta w - \alpha x - \beta z) \\ &= (\alpha x - \alpha y, 0, \alpha y - \alpha x) + (\beta z - \beta w, 0, \beta w - \beta z) = \alpha f(x, y) + \beta f(z, w) \end{aligned}$$

Der Kern wird erzeugt vom Vektor $(1, 1)$, ist also 1-dimensional. Wir ergänzen $(1, 1)$ etwa mit dem Vektor $(1, 0)$ zu einer Basis von \mathbb{R}^2 . Das Bild $f(1, 0) = (1, 0, -1)$ erzeugt das Bild $\text{Im}(f)$ (s. Beweis Dimensionsformel), welches also auch 1-dimensional ist.

5. Verständnis

- (a) Warum ist \mathbb{R}^2 zusammen mit der komponentenweisen Addition und Multiplikation kein Körper?
- (b) Richtig oder falsch? Für Unterräume V_1, V_2, V_3 eines Vektorraum V gilt :

$$V_1 + (V_2 \cap V_3) = (V_1 \cap V_2) + (V_1 \cap V_3)$$

- (c) Richtig oder falsch? Eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen gleicher endlicher Dimension ist genau dann injektiv, wenn sie surjektiv ist. Begründung!
- (d) Sei $f : V \rightarrow W$ eine surjektive lineare Abbildung und $\dim V = 6, \dim W = 2$. Was können Sie über die Dimension des Kerns der Abbildung sagen?
- (e) Die Menge \mathbb{R} kann man auffassen als \mathbb{R} -Vektorraum, aber auch als \mathbb{Q} -Vektorraum. Was sind deren Dimensionen? Begründung!

Wird korrigiert.