

4. Unterräume I

Es gilt zu zeigen, ob die genannten Teilmengen Unterräume des Vektorraums $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$ sind. Allgemein gilt, dass $U \subset V$ Unterraum ist, wenn gilt

1. $\forall u, v \in U : (u + v) \in U$
2. $\forall u \in U \forall \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda u) \in U$

Jede Teilmenge muss nun also auf 1. und 2. überprüft werden.

- A** 1. Seien $f, g \in A$. Dann gilt $(f + g) \in V$, da V Vektorraum ist und die Funktionen Elemente dieses Raums. Man betrachte nun die Addition der Funktionen.

$$(f + g)(1) = f(1) + g(1) = f(-1) + g(-1) = (f + g)(-1)$$

Es ist also $(f + g) \in A$.

2. Sei $f \in A$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $(\lambda * f) \in V$. Man schaue sich nun folgendes an:

$$(\lambda f)(1) = \lambda * f(1) = \lambda * f(-1) = (\lambda f)(-1)$$

Auch hier gilt $(\lambda * f) \in A$

A ist also Unterraum von V .

- B** 1. Seien $f, g \in B$. Dann gilt $(f + g) \in V$, da V Vektorraum ist und die Funktionen Elemente dieses Raums. Man betrachte nun die Addition der Funktionen.

$$(f + g)(-1) = f(-1) + g(-1) = -f(1) - g(1) = -(f(1) + g(1)) = -(f + g)(1)$$

Es ist also $(f + g) \in B$.

2. Sei $f \in B$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $(\lambda * f) \in V$. Man schaue sich nun folgendes an:

$$(\lambda f)(-1) = \lambda * f(-1) = \lambda * (-f(1)) = -\lambda * f(1) = -(\lambda f)(1)$$

Auch hier gilt $(\lambda * f) \in B$

B ist also Unterraum von V .

- C** 1. Seien $f, g \in C$. Dann gilt $(f + g) \in V$, da V Vektorraum ist und die Funktionen Elemente dieses Raums. Man betrachte nun die Addition der Funktionen.

$$\begin{aligned} ((f + g)(-1))^2 &= (f(-1) + g(-1))^2 = f(-1)^2 + 2f(-1)g(-1) + g(-1)^2 \\ &= f(1)^2 + 2f(-1)g(-1) + g(1)^2 \\ &\neq ((f + g)(1))^2 \end{aligned}$$

Man suche ein Gegenbeispiel, ob dieser Fall überhaupt eintreten kann. Sei $f(x) = 2x^2$ und $g(x) = x$.

$$((f + g)(-1))^2 = (f(-1) + g(-1))^2 = f(-1)^2 + 2f(-1)g(-1) + g(-1)^2 = 4 + 2(2 * (-1)) + 1 = 1$$

$$((f + g)(1))^2 = (f(1) + g(1))^2 = f(1)^2 + 2f(1)g(1) + g(1)^2 = 4 + 2(2 * 1) + 1 = 9$$

Wie man sieht, bekommt man nicht dieselbe Lösung, es gilt also $(f + g) \notin C$.

2. Sei $f \in C$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $(\lambda * f) \in V$. Man schaue sich nun folgendes an:

$$((\lambda f)(-1))^2 = (\lambda * f(-1))^2 = \lambda^2 * f(-1)^2 = \lambda^2 * f(1)^2 = ((\lambda f)(1))^2$$

Hier gilt $(\lambda * f) \in C$

Da 1. nicht erfüllt ist, ist C kein Unterraum von V .

- D** 1. Seien $f, g \in D$. Dann gilt $(f + g) \in V$, da V Vektorraum ist und die Funktionen Elemente dieses Raums. Man betrachte nun die Addition der Funktionen. Da f monoton wachsend ist, kann angenommen werden, dass die Ableitung $f' \geq 0$ sein muss in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$. Man kann also statt $(f + g)$ auf $(f' + g')$ untersuchen.

$$(f' + g')(x) = \underbrace{f'(x)}_{\geq 0} + \underbrace{g'(x)}_{\geq 0} \geq 0$$

Somit ist $f + g$ auch monoton wachsend, also $(f + g) \in D$.

2. Sei $f \in D$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $(\lambda * f) \in V$. Man schaue sich nun folgendes an:

$$(\lambda f)(x) = \lambda * f(x)$$

Das sieht ja eigentlich so aus, dass es funktionieren würde, aber was passiert mit $\lambda < 0$? Wir schauen uns ein Gegenbeispiel an, sei $f(x) = x$ und $\lambda = -1$:

$$(\lambda f)(x) = \lambda * f(x) = -1 * x = -x$$

Und das ist nicht mehr monoton wachsend! Also $(\lambda * f) \notin D$

D ist also kein Unterraum von V .

- E** 1. Seien $f, g \in E$. Dann gilt $(f + g) \in V$, da V Vektorraum ist und die Funktionen Elemente dieses Raums. Man betrachte nun die Addition der Funktionen.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Dies sieht eigentlich ganz gut aus. Kann es aber irgendwie passieren, dass sich die Funktionen zur konstanten Nullfunktion ergeben? Dann wären sie nämlich nicht mehr monoton fallend oder steigend. Man betrachte folgendes Gegenbeispiel, sei $f(x) = x$ und $g(x) = -x$:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x + (-x) = 0$$

Somit ist $f + g$ konstant, also $(f + g) \notin E$.

2. Kann man sich ersparen, da 1. schon nicht erfüllt ist.

E ist also kein Unterraum von V .

5. Unterräume II

a) Man führe einen Beweis durch Widerspruch. Es wird angenommen, dass $U_1 \neq V$ und $U_2 \neq V$ und U_1, U_2 sind Unterräume von V . Dann existiert ein $u_1 \in U_2 : u_1 \notin U_1$ und auch ein $u_2 \in U_2 : u_2 \notin U_1$.

Dann ist $u_1 + u_2 \in V$, da V ein Vektorraum ist. Andererseits ist $(u_1 + u_2) \notin U_1$ und $(u_1 + u_2) \notin U_2$ nach obiger Annahme. Dies ist ein Widerspruch, da $U_1 \cup U_2 = V$ sein müsste, aber wie gerade gezeigt dies nicht möglich ist. Somit muss die Annahme falsch sein und $U_1 = V$ oder $U_2 = V$. \square

b) $V \cap U$ ist Teilmenge von U und auch von V . Wenn man zeigen kann, dass $V \cap U$ ein Unterraum ist, ist damit gleichzeitig gezeigt, dass es auch ein K -Vektorraum ist. Es werden also die bekannten zwei Kriterien geprüft:

1.

$$\begin{aligned} & \forall x_1, x_2 \in V \cap U : (x_1 + x_2) \in V \cap U \\ \Leftrightarrow & \forall x_1, x_2 \in U \cap V : (x_1 + x_2) \in V \wedge (x_1 + x_2) \in U \end{aligned}$$

Da wir wissen, dass U und V jeweils Vektorräume sind, gilt die Aussage.

2.

$$\begin{aligned} & \forall x \in V \cap U \forall \lambda \in K : (\lambda * x) \in V \cap U \\ \Leftrightarrow & \forall x \in V \cap U \forall \lambda \in K : (\lambda * x) \in V \wedge (\lambda * x) \in U \end{aligned}$$

Auch hier ist bekannt, dass für U und V die Aussage stimmt, da es sich um Vektorräume handelt und diese über Multiplikation mit Skalaren abgeschlossen sind.

Da die beiden Kriterien für einen Unterraum erfüllt sind, gilt, dass $V \cap U$ ein Vektorraum ist.

c) Um zu zeigen, dass U_α Unterraum ist, genau dann wenn $\alpha = 0$, müssen Hin- und Rückrichtung gezeigt werden:

\Rightarrow Sei U_α ein Unterraum. Dann gilt für $x, y \in U_\alpha$

$$\begin{aligned} & (x + y) \in U_\alpha \\ \Rightarrow & (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = \alpha \\ & \underbrace{x_1 + x_2 + x_3}_{=\alpha} + \underbrace{y_1 + y_2 + y_3}_{=\alpha} = \alpha \\ & 2\alpha = \alpha \\ \Rightarrow & \alpha = 0 \end{aligned}$$

\Leftarrow Sei $\alpha = 0$. Um zu untersuchen, ob es sich bei U_0 um einen Unterraum handelt, müssen folgende Punkte gezeigt werden:

1. $\forall x, y \in U_0 : (x + y) \in U_0$

Sei $x, y \in U_0$. Dann gilt $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ und $y_1 + y_2 + y_3 = 0$. Man addiere die Vektoren:

$$(x+y) = (x_1+y_1)+(x_2+y_2)+(x_3+y_3) = x_1+x_2+x_3+y_2+y_2+y_3 = 0+0 = 0$$

2. $\forall \lambda \in K \forall x \in U_0 : (\lambda * x) \in U_0$

Sei $\lambda \in K$ und $x \in U_0$.

$$\lambda * x = \lambda * x_1 + \lambda * x_2 + \lambda * x_3 = \lambda * (x_1 + x_2 + x_3) = \lambda * 0 = 0$$

Da beide Kriterien für den Unterraum erfüllt sind, handelt es sich bei U_0 um einen Unterraum von K^3 .

U_α ist also genau dann ein Unterraum, wenn $\alpha = 0$.

□