

**Mathematik für Informatiker III**  
(Frank Hoffmann)

Abgabe: bis Mittwoch, den 06. Februar 2008, 12<sup>15</sup>

**1. Dichte, Verteilungsfunktion** (1+1+1 Punkte)

- (a) Eine Zufallsvariable  $X$  habe die Dichte  $f_X(x) = 2x$  für  $0 < x < 1$  und ansonsten sei die Dichte 0. Finden Sie die zugehörige Verteilungsfunktion von  $X$ !
- (b) Finden Sie für eine Zufallsvariable  $X$  mit der folgenden Verteilungsfunktion die zugehörige Dichte, falls sie existiert:

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(1+x^2)} & -\infty < x \leq 0, \\ \frac{1+2x^2}{2(1+x^2)} & 0 < x < \infty. \end{cases}$$

- (c) Für welchen Wert von  $c$  ist die folgende Funktion eine Verteilungsfunktion?

$$F(x) = \int_{-\infty}^x ce^{-|t|} dt$$

- 2. Erwartungswerte** (8 Punkte) Betrachten Sie den Würfel  $[0, 1]^3$  im  $\mathbb{R}^3$  zusammen mit der Gleichverteilung der Punkte. Für einen zufälligen Punkt  $z$  im Würfel seien  $R(z)$ ,  $S(z)$  und  $V(z)$  die Werte der Zufallsvariablen, die den Radius, die Oberfläche bzw. das Volumen der größten Kugel im Würfel mit Mittelpunkt in  $z$  beschreiben. Berechnen Sie deren Erwartungswerte und für eine der Variablen auch die Varianz !

**3. Markov+Tschebyschev** (2 Punkte)

Wir würfeln mit 3 fairen unterscheidbaren Würfeln bis die Summe der Augen bei einem Wurf 5 ist. Schätzen Sie sowohl mit der Markov- als auch der Tschebyschev-Ungleichung die Wahrscheinlichkeit ab, dass dies mindestens dreimal solange dauert wie im Erwartungswert.

**4. Varianzen** (2+2 Punkte)

- (a) Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit nach unten ab, dass bei  $n$  Würfeln eines fairen Würfels die Anzahl der Sechsen zwischen  $n/6 - \sqrt{n}$  und  $n/6 + \sqrt{n}$  liegt.
- (b) Es gibt einen einfachen Zusammenhang zwischen der Varianz einer Zufallsvariable  $X$  und der Varianz von  $aX + b$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ . Finden und beweisen Sie ihn.

**5. Hilfsmittel** (3 Punkte) Das zentrale Hilfsmittel bei der Berechnung von Erwartungswerten ist der folgende Satz.

Sei  $X$  eine Zufallsvariable und  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Beweisen Sie, dass  $E(g(X)) = \sum_{x \in \text{Im}(X)} g(x)p(X = x)$  für den Fall einer diskreten Zufallsvariable  $X$  und unter der Annahme, dass die auftretenden Summen absolut konvergieren.