

Mathematik für Informatiker III
(Frank Hoffmann)

von Alexander Haucke

1. **Konvexe Hülle, Fläche** (6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie das Volumen der konvexen Hülle der Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b) Der Schwerpunkt einer Punktmenge $\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ ist durch $S = \frac{P_1 + \dots + P_k}{k}$ definiert. Dabei ist die Summe koordinatenweise zu bilden (also als Summe der Ortsvektoren der Punkte). Wir betrachten nun den Schwerpunkt S von drei Punkten P_1, P_2, P_3 in \mathbb{R}^2 . Beweisen Sie, dass die Fläche des von P_1, P_2 und S aufgespannten Dreiecks genau ein Drittel der Fläche des von P_1, P_2, P_3 aufgespannten Dreiecks ist.

Wird korrigiert.

2. **Inverse einer ganzzahligen Matrix** (2 Punkte)

Sei A eine $n \times n$ -Matrix mit ganzzahligen Einträgen. Beweisen Sie folgende Aussage: Es gibt genau dann eine ganzzahlige $n \times n$ -Matrix B mit $A \cdot B = E$, wenn $|\det A| = 1$ ist.

Wird korrigiert.

3. **Erhard Schmidt** (2 Punkte)

Bestimmen Sie nach dem Erhard Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren im \mathbb{R}^4 mit Standardskalarprodukt eine orthonormale Basis des Unterraums

$$U = \text{Lin}((-3, -3, 3, 3), (-5, -5, 7, 7), (4, -2, 0, 6))$$

Wird korrigiert.

4. **Orthogonalprojektion** (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Matrix der Orthogonalprojektion auf den folgenden Unterraum im \mathbb{R}^3

$$U = \text{Lin}((-4, 0, 3), (8, 3, -6)) \subseteq \mathbb{R}^3$$

Welche Winkel bilden in U die Bilder der Standardbasisvektoren miteinander?

Lösung:

Zunächst einmal konstruieren wir mit dem Orthonormalisierungsverfahren von Erhard Schmidt eine Orthonormalbasis von U :

- $u_1 = \frac{(-4,0,3)}{\|(-4,0,3)\|} = \frac{1}{\sqrt{25}} \cdot (-4, 0, 3) = (-4/5, 0, 3/5)$
- $\widetilde{u}_2 = (8, 3, -6) - \frac{\langle (8,3,-6), (-4,0,3) \rangle}{\langle (-4,0,3), (-4,0,3) \rangle} \cdot (-4, 0, 3) = (8, 3, -6) - \frac{-50}{25} \cdot (-4, 0, 3)$
 $= (8, 3, -6) + 2 \cdot (-4, 0, 3) = (0, 3, 0)$
 $\Rightarrow u_2 = \frac{(0,3,0)}{\|(0,3,0)\|} = \frac{1}{\sqrt{9}} \cdot (0, 3, 0) = (0, 1, 0)$

$$\Rightarrow B_{Schmidt} = \left\{ \begin{pmatrix} -4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Anschließend beschreiben wir die Abbildung der Orthogonalprojektion $P_U : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$:
Allgemein gilt ja für eine Orthonormalbasis $\{u_1, \dots, u_k\}$:

$$P_U(v) := \langle v, u_1 \rangle \cdot u_1 + \dots + \langle v, u_k \rangle \cdot u_k.$$

Speziell für unseren Fall gilt also:

$$P_U(v) := \langle v, (-4/5, 0, 3/5) \rangle \cdot (-4/5, 0, 3/5) + \langle v, (0, 1, 0) \rangle \cdot (0, 1, 0).$$

Wir erhalten nun die gesuchten Einträge der Orthogonalprojektionsmatrix, indem wir die Vektoren der Standardbasis von \mathbb{R}^3 mit P_U abbilden:

- $P_U(1, 0, 0) = \langle (1, 0, 0), (-4/5, 0, 3/5) \rangle \cdot (-4/5, 0, 3/5) + \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle \cdot (0, 1, 0)$
 $= -4/5 \cdot (-4/5, 0, 3/5) = (16/25, 0, -12/25)$
- $P_U(0, 1, 0) = \langle (0, 1, 0), (-4/5, 0, 3/5) \rangle \cdot (-4/5, 0, 3/5) + \langle (0, 1, 0), (0, 1, 0) \rangle \cdot (0, 1, 0)$
 $= 1 \cdot (0, 1, 0) = (0, 1, 0)$
- $P_U(0, 0, 1) = \langle (0, 0, 1), (-4/5, 0, 3/5) \rangle \cdot (-4/5, 0, 3/5) + \langle (0, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle \cdot (0, 1, 0)$
 $= 3/5 \cdot (-4/5, 0, 3/5) = (-12/25, 0, 9/25)$

Die Matrix der Orthogonalprojektion ist also $P_U = \begin{pmatrix} 16/25 & 0 & -12/25 \\ 0 & 1 & 0 \\ -12/25 & 0 & 9/25 \end{pmatrix}.$

Da wir oben bereits die Bilder der Standardbasisvektoren ausgerechnet haben, müssen wir unsere Ergebnisse nur noch in die Formel aus der Vorlesung einsetzen:

- $\cos \alpha_{(P_U(1,0,0), P_U(0,1,0))} = \cos \alpha_{((16/25, 0, -12/25), (0, 1, 0))} = \frac{\langle (16/25, 0, -12/25), (0, 1, 0) \rangle}{\|(16/25, 0, -12/25)\| \cdot \|(0, 1, 0)\|} = 0$
 $\Rightarrow \alpha_{(P_U(1,0,0), P_U(0,1,0))} = \arccos(0) = \pi/2$
- $\cos \alpha_{(P_U(1,0,0), P_U(0,0,1))} = \cos \alpha_{((16/25, 0, -12/25), (-12/25, 0, 9/25))} =$
 $\frac{\langle (16/25, 0, -12/25), (-12/25, 0, 9/25) \rangle}{\|(16/25, 0, -12/25)\| \cdot \|(-12/25, 0, 9/25)\|}$
 $= \frac{\frac{16 \cdot (-12) - 12 \cdot 9}{25^2}}{\sqrt{\frac{16^2 + 12^2}{25^2}} \cdot \sqrt{\frac{12^2 + 9^2}{25^2}}} = \frac{-300}{\sqrt{400} \cdot \sqrt{225}} = \frac{-300}{300} = -1$
 $\Rightarrow \alpha_{(P_U(1,0,0), P_U(0,0,1))} = \arccos(-1) = \pi$
- $\cos \alpha_{(P_U(0,1,0), P_U(0,0,1))} = \cos \alpha_{((0, 1, 0), (-12/25, 0, 9/25))} = \frac{\langle (0, 1, 0), (-12/25, 0, 9/25) \rangle}{\|(0, 1, 0)\| \cdot \|(-12/25, 0, 9/25)\|} = 0$
 $\Rightarrow \alpha_{(P_U(0,1,0), P_U(0,0,1))} = \arccos(0) = \pi/2$

5. Skalarprodukt und Winkel (4 Punkte)

Eine bekannte Formel sagt, dass für einen beliebigen (Nichtnull-) Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ und

die drei Winkel $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$, die dieser Vektor mit den drei Koordinatenachsen bildet, die folgende Identität gilt:

$$\sin^2 \alpha_x + \sin^2 \alpha_y + \sin^2 \alpha_z = 2$$

Beweisen Sie diese Formel unter Benutzung der Winkeldefinition mittels Standardskalarprodukt.

Lösung:

Sei $v = (v_1, v_2, v_3)^t$. Wir berechnen die Winkel von v mit den drei Koordinatenachsen nach folgender Definition aus der Vorlesung:

$$\cos \alpha_{(x,y)} = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Es gilt also, weil die x -Achse die lineare Hülle des Vektors $(1, 0, 0)^t$ ist:

$$\alpha_x = \arccos \frac{\langle (v_1, v_2, v_3)^t, (1, 0, 0)^t \rangle}{\|v\| \cdot \|(1, 0, 0)^t\|} = \arccos \frac{v_1 \cdot 1 + v_2 \cdot 0 + v_3 \cdot 0}{\|v\| \cdot 1} = \arccos \frac{v_1}{\|v\|}.$$

Analog ergibt sich $\alpha_y = \arccos \frac{v_2}{\|v\|}$ und $\alpha_z = \arccos \frac{v_3}{\|v\|}$.

Nun beachten wir

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

und setzen schließlich unsere Erkenntnisse in die Formel ein:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha_x + \sin^2 \alpha_y + \sin^2 \alpha_z &= (1 - \cos^2 \alpha_x) + (1 - \cos^2 \alpha_y) + (1 - \cos^2 \alpha_z) \\ &= 3 - (\cos \alpha_x)^2 - (\cos \alpha_y)^2 - (\cos \alpha_z)^2 \\ &= 3 - \left(\cos \left(\arccos \frac{v_1}{\|v\|} \right) \right)^2 - \left(\cos \left(\arccos \frac{v_2}{\|v\|} \right) \right)^2 - \left(\cos \left(\arccos \frac{v_3}{\|v\|} \right) \right)^2 \\ &= 3 - \frac{v_1^2}{\|v\|^2} - \frac{v_2^2}{\|v\|^2} - \frac{v_3^2}{\|v\|^2} \\ &= 3 - \frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}{\|v\|^2} \\ &= 3 - \frac{\|v\|^2}{\|v\|^2} \\ &= 2. \end{aligned}$$