

Zusatzaufgabenblatt vom Freitag, den 06. Juli 2007 zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker II

(Frank Hoffmann)

Abgabe freiwillig, bis 13.07.

Hinweis: Es werden alle abgegebenen Aufgaben korrigiert und die Punkte angerechnet. Es handelt sich um alte Klausuraufgaben.

1. Polynome (3 Punkte)

- (a) Beweisen Sie, dass für ein Polynom mit reellen Koeffizienten $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ mit jeder komplexen Nullstelle z auch die konjugiert komplexe Zahl \bar{z} Nullstelle ist. Geben Sie die verwendeten Regeln für das Rechnen mit konjugierten komplexen Zahlen an. (Diese brauchen Sie nicht beweisen.)
- (b) Bestimmen Sie mit einer Methode Ihrer Wahl ein reelles Polynom von möglichst geringem Grad, dessen Graph die folgenden Punkte in der Ebene enthält. Geben Sie das Ergebnis in Summendarstellung an.

$$(-1, -4), (0, -2), (1, 0), (2, 8)$$

2. Verständnisfrage und 2 kleine Beweise (3 Punkte)

- (a) Betrachten Sie eine konvergente Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von reellen Zahlen. Wie kann sich deren Konvergenzverhalten ändern, wenn man 1000 beliebige Folgenglieder abändern kann? Sei die zu (a_n) gehörige Partialsummenfolge (s_n) ebenfalls konvergent. Wie kann sich deren Konvergenzverhalten ändern, wenn man wiederum 1000 Glieder der Folge (a_n) abändern darf? Jeweils kurze Begründung!
- (b) Zeigen Sie, $\log_b f(n) \in \Theta(\log_2 f(n))$ für jede Konstante $b > 1$.
- (c) Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktion einer stetigen, monoton wachsenden Funktion wiederum stetig und monoton wachsend ist.

3. Kurvendiskussion (3 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \frac{x}{\ln x}$. Bevor Sie die folgenden Teilaufgaben lösen, schreiben Sie jeweils kurz, was Sie tun wollen.

- (a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich in den reellen Zahlen sowie die Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereichs.
- (b) Bestimmen Sie Monotonieverhalten und Asymptoten.
- (c) Finden Sie lokale Extremalstellen und Wendepunkte, falls vorhanden, und fertigen Sie eine (grobe) Skizze der Kurve an.

4. Verschiedene Eigenschaften, Integrale (1+2 Punkte)

- (a) Betrachten Sie die Eigenschaften 1='stetig', 2='Riemann-integrierbar', 3='gleichmäßig stetig', 4='differenzierbar', die Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ haben können. Nennen (kein Beweis!) Sie 4 Implikationen zwischen verschiedenen Eigenschaften, die für jede solche Funktion f wahr sind und nennen sie zwei weitere Implikationen, die im Allgemeinen nicht richtig sind und geben Sie dazu Gegenbeispiele an.
- (b) Bestimmen Sie die folgenden Integrale und nennen Sie die Methode, die Sie verwenden.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad ; \quad \int e^{4t-1} dx \quad ; \quad \int x e^x + \sqrt[4]{x}^3 dx$$