

## 1 Gruppe, Körper

a) Um zu zeigen, dass eine Gruppe gebildet wird, müssen folgende drei Eigenschaften überprüft werden:

1. Ist die Addition mit  $\mod 1$  auf dem Intervall  $I = [0; 1[$  assoziativ?
2. Existiert ein neutrales Element?

$$(a + e) \mod 1 \stackrel{!}{=} a \\ \Rightarrow e = 0, \text{ da } a \text{ nach Definition nie } 1$$

3. Gibt es inverse Elemente?

$$(a + a^{-1}) \mod 1 \stackrel{!}{=} e \\ (a + a^{-1}) = 1, \text{ damit als Rest } 0 \text{ bleibt} \\ \Rightarrow a^{-1} = 1 - a \text{ dies gilt allerdings nur für } a \neq 0, \text{ für } a = 0 \text{ gilt } a^{-1} = 0$$

b) Um zu zeigen, dass es sich bei der Menge  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  zusammen mit der Multiplikation und der Addition um einen Körper handelt, müssten folgende Eigenschaften nachgewiesen werden:

1. Handelt es sich bei  $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +)$  um eine abelsche Gruppe?

- assoziativ?

$$a + (b + c) \stackrel{!}{=} (a + b) + c \\ (a_1 + a_2\sqrt{2}) + [(b_1 + b_2\sqrt{2}) + (c_1 + c_2\sqrt{2})] \\ = (a_1 + a_2\sqrt{2}) + (b_1 + b_2\sqrt{2}) + (c_1 + c_2\sqrt{2}) \\ = [(a_1 + a_2\sqrt{2}) + (b_1 + b_2\sqrt{2})] + (c_1 + c_2\sqrt{2}) \\ = (a + b) + c$$

- neutrales Element?

$$a + e \stackrel{!}{=} a \\ (a_1 + a_2\sqrt{2}) + (e_1 + e_2\sqrt{2}) = (a_1 + a_2\sqrt{2}) \\ \Rightarrow e_1 + e_2\sqrt{2} = 0 \text{ nach der Definition von Addition} \\ \text{lässt sich darstellen durch } e_1 = 0, e_2 = 0$$

- inverses Element?

$$\begin{aligned}
 a + a^{-1} &\stackrel{!}{=} e \\
 (a_1 + a_2\sqrt{2}) + (a_1^{-1} + a_2^{-1}\sqrt{2}) &= (0 + 0\sqrt{2}) \\
 a_1^{-1} + a_2^{-1}\sqrt{2} &= -(a_1 + a_2\sqrt{2}) \\
 a_1^{-1} + a_2^{-1}\sqrt{2} &= -a_1 - a_2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

- kommutativ?

$$\begin{aligned}
 a + b &\stackrel{!}{=} b + a \\
 (a_1 + a_2\sqrt{2}) + (b_1 + b_2\sqrt{2}) &= a_1 + a_2\sqrt{2} + b_1 + b_2\sqrt{2} \\
 &= b_1 + b_2\sqrt{2} + a_1 + a_2\sqrt{2} = (b_1 + b_2\sqrt{2}) + (a_1 + a_2\sqrt{2}) \\
 &= b + a
 \end{aligned}$$

Ja, es handelt sich um eine abelsche Gruppe!

2. Ist  $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), *)$  eine abelsche Gruppe?

- assoziativ?

$$\begin{aligned}
 a * (b * c) &\stackrel{!}{=} (a * b) * c \\
 (a_1 + a_2\sqrt{2}) * [(b_1 + b_2\sqrt{2}) * (c_1 + c_2\sqrt{2})] \\
 &= (a_1 + a_2\sqrt{2}) * (b_1 + b_2\sqrt{2}) * (c_1 + c_2\sqrt{2}) \\
 &= [(a_1 + a_2\sqrt{2}) * (b_1 + b_2\sqrt{2})] * (c_1 + c_2\sqrt{2}) \\
 &= (a * b) * c
 \end{aligned}$$

- neutrales Element?

$$\begin{aligned}
 a * e &\stackrel{!}{=} a \\
 (a_1 + a_2\sqrt{2}) * (e_1 + e_2\sqrt{2}) &= (a_1 + a_2\sqrt{2}) \\
 \Rightarrow e_1 + e_2\sqrt{2} &= 1 \text{ nach der Definition von Multiplikation} \\
 &\text{lasst sich darstellen durch } e_1 = 1, e_2 = 0
 \end{aligned}$$

- inverses Element?

- kommutativ?

$$\begin{aligned}
 a * b &\stackrel{!}{=} b * a \\
 (a_1 + a_2\sqrt{2}) * (b_1 + b_2\sqrt{2}) &= (b_1 + b_2\sqrt{2}) * (a_1 + a_2\sqrt{2}) \\
 b * a
 \end{aligned}$$

3. Sind die Operationen  $+$  und  $*$  distributiv?

$$\begin{aligned} a * (b + c) &\stackrel{!}{=} a * b + a * c \\ (a_1 + a_2\sqrt{2}) * ((b_1 + b_2\sqrt{2}) + (c_1 + c_2\sqrt{2})) \\ &= (a_1 + a_2\sqrt{2}) * (b_1 + b_2\sqrt{2}) + (a_1 + a_2\sqrt{2}) * (c_1 + c_2\sqrt{2}) \\ &= a * b + a * c \end{aligned}$$

Die Operatoren sind distributiv.

Da alle drei Voraussetzungen zum Körper erfüllt sind, handelt es sich also bei  $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, *)$  um einen.

## 2 Algebraische Struktur

• Untersuchung auf Assoziativität:

–  $a \square b$ ; es ist  $a \square (b \square c) = (a \square b) \square c$  zu zeigen.

$$\begin{aligned} a \square (b \square c) &= a \square (b + c + 1) = a + (b + c + 1) + 1 \\ &= (a + b + 1) + c + 1 = (a + b + 1) \square c = (a \square b) \square c \end{aligned}$$

□

–  $a \diamond b$ ; es ist  $a \diamond (b \diamond c) = (a \diamond b) \diamond c$  zu zeigen.

$$\begin{aligned} a \diamond (b \diamond c) &= a \diamond (bc + b + c) \\ &= a(bc + b + c) + a + (bc + b + c) = abc + ab + ac + a + bc + b + c \\ &= abc + ac + bc + ab + a + b + c = (ab + a + b)c + ab + a + b + c \\ &= (a \diamond b)c + (a \diamond b) + c = (a \diamond b) \diamond c \end{aligned}$$

□

Die beiden Strukturen sind assoziativ!

• Untersuchung auf Kommutativität:

– Es ist  $a \square b = b \square a$  zu zeigen.

$$a \square b = a + b + 1 = b + a + 1 = b \square a$$

□

- Es ist  $a \diamond b = b \diamond a$  zu zeigen.

$$a \diamond b = ab + a + b = ba + b + a = b \diamond a$$

□

Die Strukturen sind kommutativ!

- Das neutrale Element wird bestimmt:

- Gesucht ist  $e$  mit  $a \square e = a$

$$a \square e = a$$

$$a + e + 1 = a$$

$$e = -1$$

Das neutrale Element ist  $-1$ .

- Gesucht ist  $e$  mit  $a \diamond e = a$

$$a \diamond e = a$$

$$ae + a + e = a$$

$$e(a + 1) = 0$$

$$e = 0$$

Das neutrale Element zu  $\diamond$  ist  $0$

- Gibt es inverse Elemente?

- Gesucht ist für alle  $a$  ein  $a^{-1}$  mit  $a \square a^{-1} = e$

$$a \square a^{-1} = e$$

$$a + a^{-1} + 1 = -1$$

$$a^{-1} = -2 - a$$

Zu jedem  $a$  kann ein passendes inverses Element bestimmt werden durch

$$a^{-1} = -2 - a$$

- Gesucht ist für alle  $a$  ein  $a^{-1}$  mit  $a \diamond a^{-1} = e$

$$a \diamond a^{-1} = e$$

$$aa^{-1} + a + a^{-1} = 0$$

$$aa^{-1} + a^{-1} = -a$$

$$a^{-1}(a + 1) = -a$$

$$a^{-1} = \frac{-a}{a + 1}$$

Zu jedem  $a$  kann ein passendes inverses Element bestimmt werden durch  
 $a^{-1} = \frac{-a}{a+1}$

- Es ist zu untersuchen, ob die Strukturen distributiv sind.

- Es ist die Gleichheit  $a \diamond (b \square c) = (a \diamond b) \square (a \diamond c)$  zu Überprüfen.

$$\begin{aligned} a \diamond (b \square c) &= a(b \square c) + a + (b \square c) = a(b + c + 1) + a + (b + c + 1) \\ &= ab + ac + a + a + b + c + 1 = (ab + a + b) + (ac + a + c) + 1 \\ &= (a \diamond b) \square (a \diamond c) \end{aligned}$$

□

- Es ist die Gleichheit  $a \square (b \diamond c) = (a \square b) \diamond (a \square c)$  zu Überprüfen.

$$\text{Linke Seite: } a \diamond (b \square c) = a \diamond (b + c + 1) = a(b + c + 1) + a + (b + c + 1)$$

$$\text{rechte Seite: } (a \square b) \diamond (a \square c) = (a + b + 1) \diamond (a + c + 1)$$

$$= (a + b + 1)(a + c + 1) + (a + b + 1) + (a + c + 1)$$

Widerspruch, da wir auf der rechten Seite unter anderem  $a^2$  erhalten, was links nie möglich ist. Die Strukturen sind also nur in eine Richtung distributiv.

### 3 Rationale Zahlen

Es ist die wohldefiniertheit der Addition und Multiplikation von rationalen Zahlen in Äquivalenzklassendarstellung zu zeigen.

Es gilt:  $(x, y) \sim (\hat{x}, \hat{y}) \Leftrightarrow x\hat{y} = y\hat{x}$

$$(a, b)_{\sim} + (c, d)_{\sim} = (ad + cb, bd)_{\sim} \quad (\text{Definition der Addition})$$

Es ist zu zeigen:  $(a, b)_{\sim} + (c, d)_{\sim} = (\hat{a}, \hat{b})_{\sim} + (\hat{c}, \hat{d})_{\sim}$

$$\Rightarrow (ad + cb, bd) \stackrel{!}{\sim} (\hat{a}\hat{d} + \hat{c}\hat{b}, \hat{b}\hat{d})$$

Es muss also  $(ad + cb)(\hat{b}\hat{d}) \stackrel{!}{=} (bd)(\hat{a}\hat{d} + \hat{c}\hat{b})$  gelten.

$$(ad + cb)(\hat{b}\hat{d}) = ad\hat{b}\hat{d} + cb\hat{b}\hat{d} = a\hat{b}d\hat{d} + c\hat{d}b\hat{b}$$

$$= b\hat{a}d\hat{d} + d\hat{c}b\hat{b} = (bd)(\hat{a}\hat{d} + \hat{c}\hat{b}) \quad \square$$

$$(a, b)_{\sim} \cdot (c, d)_{\sim} = (ac, bd)_{\sim} \quad (\text{Definition der Multiplikation})$$

Es ist zu zeigen:  $(a, b)_{\sim} \cdot (c, d)_{\sim} = (\hat{a}, \hat{b})_{\sim} \cdot (\hat{c}, \hat{d})_{\sim}$

$$\Rightarrow (ac, bd) \stackrel{!}{\sim} (\hat{a}\hat{c}, \hat{b}\hat{d})$$

Es muss also  $ac\hat{b}\hat{d} \stackrel{!}{=} bd\hat{a}\hat{c}$  gelten.

$$ac\hat{b}\hat{d} = a\hat{b}c\hat{d} = b\hat{a}d\hat{c} = bd\hat{a}\hat{c} \quad \square$$

#### 4 Intervalle

Sei  $A_1 = \mathbb{Q} \cap (a, b)$  die Menge der rationalen Zahlen im reellen Intervall  $(a, b)$ . Es ist nun zu zeigen, dass diese Menge abzählbar ist, d.h. dass eine Bijektion  $f : A_1 \rightarrow \mathbb{N}$  existiert. Wie in der Vorlesung gesehen, können Rationale Zahlen auch als Äquivalenzklassen von Brüchen aufgefasst werden. Und diese Äquivalenzklassen kann man in dem Intervall "durchnummerieren", also den natürlichen Zahlen zuordnen. Somit existiert also eine eindeutige Zuordnung, d.h.  $A_1$  ist abzählbar unendlich groß.

$A_2 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap (a, b)$  sei die Menge der irrationalen Zahlen in  $(a, b)$  und es gilt zu zeigen, dass diese Menge überabzählbar ist. Die Vereinigung  $A_1 \cup A_2$  entspricht ja dem reellen Intervall  $(a, b)$ . Es ist nun aber bekannt, dass die reellen Zahlen, auch schon in einem kleinen Intervall, überabzählbar sind (siehe Cantors Diagonalisierung). Da wir aber bereits gezeigt haben, dass  $A_1$  abzählbar ist, muss folglich der überabzählbare Anteil in  $(a, b) \setminus A_1 = A_2$  liegen. Somit ist gezeigt, dass  $A_2$  überabzählbar ist.

#### 5 Supremum

a)  $X \cup Y$  ist durch  $X \cup Y = \{a | a \in X \vee a \in Y\}$  definiert. D. h., dass  $|X \cup Y| \geq |X|$  und  $|X \cup Y| \geq |Y|$  und somit die Vereinigung nach der Definition von  $X$  und  $Y$  nichtleer ist.

Und da schon  $X$  und  $Y$  nach oben beschränkt sind und sozusagen kein Element verloren geht, muss folglich auch die Vereinigung  $X \cup Y$  nach oben beschränkt sein. Und zwar ist hier dann die obere Schranke das größte Element der jeweiligen Schranken von  $X$  und  $Y$ .

$X + Y$  ist nichtleer, da sich durch die Addition nicht die Anzahl der Elemente ändern kann. Im schlechtesten Fall, wenn  $X$  und  $Y$  beide nach Definition nur ein Element besitzen, dann wäre auch bei  $X + Y$  noch ein Element vorhanden, nämlich welches durch  $x \in X + y \in Y$  charakterisiert ist.

Zudem ist es auch nach oben beschränkt, da sich durch die Addition einfach nur die Grenzen verschieben (entlang des Zahlenstrahls) aber nicht aufgehoben werden.

b) Sei  $x = \sup X$  und  $y = \sup Y$ . Dann ist nach der Definition von der Vereinigung (siehe a)) das Supremum der Vereinigung entweder  $x$  oder  $y$ . Es ist  $x$  genau dann, wenn  $x \leq y$  und  $y$  für  $x < y$ . Im allgemeinen ist es also das Maximum von den Suprema.

c) Sei wieder  $x = \sup X$  und  $y = \sup Y$ . Dann ist nach Definition von  $X + Y$  auch  $x + y$  Supremum, nämlich, das von  $X + Y$ .

d) Der Beweis wird durch Kontradiktion geführt.

Sei  $X$  eine endliche Menge und  $m \in X = \max X$ . Damit ist  $m$  nach Definition vom Maximum auch obere Schranke. Und da es keine kleineren oberen Schranken geben kann, da diese dann kleiner als  $m$  wären, muss  $m$  auch Supremum sein. Und somit ist  $\sup X \in X$ .