

Mathematik für Informatiker II
(Leif Harrass)

1. **Konvergenz** Wird korrigiert.

2. **Folgen** (5 Punkte) Zeigen Sie, dass für eine konvergente Folge (a_n) mit Grenzwert a auch die Folge $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$ den Grenzwert a hat. Finden Sie ein Beispiel, dass die Umkehrung dieser Aussage im Allgemeinen nicht richtig ist.

Wir müssen für jedes vorgegebene $\epsilon > 0$ zeigen, dass $|\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} - a| \leq \epsilon$ für $n > N(\epsilon)$. Sei also $\epsilon > 0$ gegeben. Wir wissen, dass die Folge der a_n konvergiert. Somit gibt es ein n_0 , so dass für alle a_n mit $n > n_0$ gilt $|a_n - a| < \epsilon/2$.

Das heißt, ab n_0 gilt insbesondere:

$$a - \epsilon/2 < a_n < a + \epsilon/2$$

Mit dieser Vorüberlegung sind wir nun schon fast am Ziel, wir müssen nur noch den Ausdruck $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$ geeignet zerlegen. Dazu betrachten wir zum einen die ersten n_0 Summanden des Zählers und zum anderen die restlichen Summanden. Damit erhalten wir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n_0}}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \dots + a_n}{n}$$

Der Ausdruck $\frac{a_1+a_2+\dots+a_{n_0}}{n}$ konvergiert offensichtlich gegen Null, d.h., es existiert ein n_1 , so dass $|\frac{a_1+a_2+\dots+a_{n_0}}{n}| < \epsilon/2$ ist für alle $n > n_1$, denn der Zähler bleibt ab einem Zeitpunkt konstant, während der Nenner gegen Unendlich strebt.

Wir müssen noch zeigen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n_0+1}+a_{n_0+2}+\dots+a_n}{n} = a$ ist. Wir können aufgrund der Wahl von n_0 den Ausdruck $\frac{a_{n_0+1}+a_{n_0+2}+\dots+a_n}{n}$ abschätzen durch:

$$\frac{n - n_0}{n}(a - \epsilon/2) < \frac{a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \dots + a_n}{n} < \frac{n - n_0}{n}(a + \epsilon/2)$$

Im Zähler wurden dabei einfach alle Folgenglieder nach oben bzw. unten abgeschätzt. Da $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-n_0}{n} = 1$ ist, ergibt sich $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n_0+1}+a_{n_0+2}+\dots+a_n}{n} = a$, d.h. es muss ein n_2 geben, so dass für $n > n_2$ gilt $|\frac{a_{n_0+1}+a_{n_0+2}+\dots+a_n}{n} - a| < \epsilon/2$. Wähle nun N größer als n_1 und n_2 und die Behauptung ist bewiesen.

Die Umkehrung obiger Aussage gilt nicht. Die Folge $((-1)^n)_{n>0}$ ist divergent, während $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-1+1-\dots+(-1)^n}{n}$ eine Nullfolge ist.

3. **Viele Grenzen** Wird korrigiert.