

## 1 Polynomentwicklung

a) Es ist zu zeigen, dass immer eine Polynomentwicklung existiert. Dies geschieht im folgenden dadurch, dass die Formel  $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  in die Form  $p(x) = \sum_{i=0}^n b_i (x - x_0)^i$  umgeformt wird.

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Hierzu gibt es immer Darstellung der Form

$$p(x) = (x - x_0)(c_n x^{n-1} + c_{n-1} x^{n-2} + \dots + c_2 x + c_1) + p(x_0)$$

Polynom  $q(x)$  in den Klammern kann wieder so dargestellt werden

$$\Leftrightarrow (x - x_0) ((x - x_0)(d_n x^{n-2} + d_{n-1} x^{n-3} + \dots + d_3 x + d_2) + q(x_0)) + p(x_0)$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0) ((x - x_0) ((x - x_0)(e_n x^{n-3} + e_{n-1} x^{n-4} + \dots + e_4 x + e_3) + r(x_0)) + q(x_0)) + p(x_0)$$

Dies kann iterativ angewendet werden (noch  $n - 3$  mal), bis man folgendes erhält:

$$\Leftrightarrow (x - x_0) [(x - x_0) ((x - x_0) (\dots (x - x_0) y_n) + z(x_0)) + \dots] + q(x_0) + p(x_0)$$

Die kann ausmultipliziert werden zu

$$\Leftrightarrow (x - x_0)^n y_n + (x - x_0)^{n-1} z(x_0) + \dots + (x - x_0) q(x_0) + p(x_0)$$

indem alle Koeffizienten mit  $b_i$  substituiert werden erhält man schlussendlich

$$\Leftrightarrow (x - x_0)^n b_n + (x - x_0)^{n-1} b_{n-1} + \dots + (x - x_0) b_1 + b_0$$

Es existiert also immer eine Polynomentwicklung. Die Polynomentwicklung ist auch eindeutig, da wenn zwei unterschiedliche Polynomentwicklungen des selben Grades existieren würden, bei denen der letzte Koeffizient bei  $(x - x_0)^0$  gleich sein müsste. Den könnte man dann abziehen und einmal  $(x - x_0)$  ausklammern, weswegen dann wieder der letzte Koeffizient identisch sein müsste usw.

b) Das Polynom  $x^2 - 2x - 1$  soll an den Stellen  $x_0 = 1$  und  $x_0 = -1$  entwickelt werden.

Als erstes für  $x - 1$ :

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - 1) \left( \underbrace{c_2}_{=a_2=1} x + \underbrace{c_1}_{=c_2 \cdot 1 + a_1 = -1} \right) + \underbrace{p(1)}_{=-2} \\ &= (x - 1)(x - 1) + 2 = (x - 1)^2 - 2 \end{aligned}$$

Und jetzt noch für  $x + 1$ :

$$\begin{aligned}
 p(x) &= (x+1) \left( \underbrace{c_2}_{=a_2=1} x + \underbrace{c_1}_{=c_2*(-1)+a_1=-3} \right) + \underbrace{p(-1)}_{=2} \\
 &= (x+1)(x-3) + 2 \\
 &= (x+1) \left( \underbrace{(x+1)}_{=a'_1=1} \underbrace{d_2}_{=-4} + \underbrace{p'(-1)}_{=-4} \right) + 2 \\
 &= (x+1)((x+1) - 4) + 2 = (x+1)^2 - 4(x+1) + 2
 \end{aligned}$$

## 2 Newton und Lagrange

a) Es soll die in der Tabelle aufgeführten Messpunkte per Newton-Verfahren interpoliert werden.

i	x	y			
0	-2	0			
			y <sub>01</sub> =0		
1	-1	0		y <sub>012</sub> =-1/2	
			y <sub>12</sub> =-1	y <sub>0123</sub> =1/2	
2	0	-1		y <sub>123</sub> =1	y <sub>01234</sub> =-1/4
			y <sub>23</sub> =1	y <sub>1234</sub> =-1/2	
3	1	0		y <sub>234</sub> =-1/2	
			y <sub>34</sub> =0		
4	2	0			

Die jeweiligen  $y$  berechnen sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
 y_{01} &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{0 - 0}{-1 + 2} = 0 & y_{12} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - 0}{0 + 1} = -1 \\
 y_{23} &= \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{0 + 1}{0 + 1} = 1 & y_{34} &= \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \frac{0 - 0}{2 - 1} = -1 \\
 y_{012} &= \frac{y_{12} - y_{01}}{x_2 - x_0} = \frac{-1 - 0}{0 + 2} = -\frac{1}{2} & y_{123} &= \frac{y_{23} - y_{12}}{x_3 - x_1} = \frac{1 + 1}{1 + 1} = 1 \\
 y_{234} &= \frac{y_{34} - y_{23}}{x_4 - x_2} = \frac{0 - 1}{2 - 0} = -\frac{1}{2} & y_{0123} &= \frac{y_{123} - y_{012}}{x_3 - x_0} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 + 2} = \frac{1}{2} \\
 y_{1234} &= \frac{y_{234} - y_{123}}{x_4 - x_1} = \frac{-\frac{1}{2} - 1}{2 + 1} = -\frac{1}{2} & y_{01234} &= \frac{y_{1234} - y_{0123}}{x_4 - x_0} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{2 + 2} = -\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Das Polynom ist dann wie folgt aufgebaut:

$$n(x) = y_0 + y_{01}(x - x_0) + y_{012}(x - x_0)(x - x_1) + y_{0123}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + y_{01234}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Es ergibt sich also

$$n(x) = -\frac{1}{2}(x+1)(x+2) + \frac{1}{2}x(x+1)(x+2) - \frac{1}{4}(x-1)x(x+1)(x+2)$$

**b)** Die selben Messpunkte werden jetzt mit dem Verfahren von Lagrange interpoliert. Die Idee ist ein Polynom folgender Form zu finden:

$$l(x) = y_0p_0(x) + y_1p_1(x) + \dots + y_np_n(x)$$

wobei sich die  $p_i(x)$  wie folgt berechnen:

$$p_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

$$p_0(x) = \frac{(x+1)(x)(x-1)(x-2)}{(-2+1)(-2)(-2-1)(-2-2)} = \frac{1}{24}x(x+1)(x-1)(x-2)$$

$$p_1(x) = \frac{(x+2)(x)(x-1)(x-2)}{(-1+2)(-1)(-1-1)(-1-2)} = -\frac{1}{6}x(x+2)(x-1)(x-2)$$

$$p_2(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+2)(0+1)(0-1)(0-2)} = \frac{1}{4}(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$$

$$p_3(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x)(x-2)}{(1+2)(1+1)(1)(1-2)} = -\frac{1}{6}x(x+1)(x+2)(x-2)$$

$$p_4(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x)(x-1)}{(2+2)(2+1)(2)(2-1)} = \frac{1}{24}x(x+1)(x+2)(x-1)$$

Wir setzen in die Formel ein:

$$l(x) = 0 * p_0(x) + 0 * p_1(x) - p_2(x) + 0 * p_3(x) + 0 * p_4(x)$$

$$l(x) = -\frac{1}{4}(x+2)(x+1)(x-1)(x-2) = -\frac{1}{4}(x^4 - 5x^2 + 4)$$

### 3 Nullstellen

Von dem Polynom  $p(x) = x^4 + 9x^3 + 29x^2 + 39x + 18$  werden die Nullstellen bestimmt.

Stelle	1	9	29	39	18
0		0	0	0	0
	1	9	29	39	18
-1		-1	-8	-21	-18
	1	8	21	18	0

$x_0 = -1$  ist also Nullstelle. Es wird also  $x + 1$  nun per Polynomdivision abgespalten:

$$\begin{array}{r}
 (x^4 + 9x^3 + 29x^2 + 39x + 18) \div (x + 1) = x^3 + 8x^2 + 21x + 18 \\
 \underline{-x^4 - x^3} \phantom{+ 29x^2 + 39x + 18} \\
 8x^3 + 29x^2 \phantom{+ 39x + 18} \\
 \underline{-8x^3 - 8x^2} \phantom{+ 39x + 18} \\
 21x^2 + 39x \phantom{+ 18} \\
 \underline{-21x^2 - 21x} \phantom{+ 18} \\
 18x + 18 \\
 \underline{-18x - 18} \\
 0
 \end{array}$$

Von diesem neuen Polynom wird nun wieder per Horner-Schema die Nullstelle gesucht

Stelle	1	8	21	18
-1		-1	-7	-14
	1	7	14	4
-2		-2	-12	-18
	1	6	9	0

Die Nullstelle ist bei  $x_1 = -2$  und wird wieder per Polynomdivision abgespalten.

$$\begin{array}{r}
 (x^3 + 8x^2 + 21x + 18) \div (x + 2) = x^2 + 6x + 9 \\
 \underline{-x^3 - 2x^2} \phantom{+ 21x + 18} \\
 6x^2 + 21x \phantom{+ 18} \\
 \underline{-6x^2 - 12x} \phantom{+ 18} \\
 9x + 18 \\
 \underline{-9x - 18} \\
 0
 \end{array}$$

Auf das Polynom 2. Grades kann die p-q-Formel angewendet werden:

$$x_{2,3} = -3 \pm \sqrt{3^2 - 9} = -3 \pm 0 = -3$$

Weitere Nullstellen gibt es nicht. Die Produktdarstellung sieht also wie folgt aus:

$$p(x) = (x + 1)(x + 2)(x + 3)^2$$

#### 4 Polynomdivision

a) Um den ganzrationalen und den gebrochen rationalen Anteil zu bestimmen, muss erstmal eine Polynomdivision durchgeführt werden:

$$\begin{array}{r} (x^7 + x^6 + x^4 + x^3 + x + 1) : (x^4 + x^2 + x + 1) = x^3 + x^2 - x - 1 + \frac{x^2 + 3x + 2}{x^4 + x^2 + x + 1} \\ \underline{-x^7 \phantom{+ x^6} - x^5 - x^4 - x^3 \phantom{+ x + 1}} \\ x^6 - x^5 \phantom{+ x^4 + x^3 + x + 1} \\ \underline{-x^6 \phantom{+ x^5} - x^4 - x^3 - x^2 \phantom{+ x + 1}} \\ -x^5 - x^4 - x^3 - x^2 + x \phantom{+ 1} \\ \underline{x^5 \phantom{+ x^4} + x^3 + x^2 + x \phantom{+ 1}} \\ -x^4 \phantom{+ x^3} + 2x + 1 \phantom{+ 1} \\ \underline{x^4 \phantom{+ x^3} + x^2 + x + 1} \\ x^2 + 3x + 2 \end{array}$$

Die Lösung ergibt sich also als

$$\frac{p(x)}{q(x)} = x^3 + x^2 - x + 1 + \frac{x^2 + 3x + 2}{x^4 + x^2 + x + 1}$$

Nun betrachtet man die möglichen Lösungen in  $\mathbb{Z}_2$ . Als erstes muss dazu geguckt werden, wo der Nenner der gebrochen rationalen Funktion 1 ist, denn nur hier kann überhaupt das Ergebnis in  $\mathbb{Z}_2$  liegen.

$$x^4 + x^2 + x + 1 = 1 \Rightarrow x^4 + x^2 + x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$x_1 = 0$  liegt auch in der Menge drin, gehört also schonmal dazu.

b) Auch hier führt man als erstes eine Polynomdivision durch

$$\begin{array}{r} (2x^7 + 5x^6 - 14x^5 + 20x^4 - x^3 - 6x^2 + 6x + 4) : (x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 2x + 1) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + 2 + \frac{-x^3 - 3x^2 + 2}{x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 2x + 1} \\ \underline{-2x^7 - 8x^6 + 4x^5 - 4x^4 - 2x^3} \\ -3x^6 - 10x^5 + 16x^4 - 3x^3 - 6x^2 \phantom{+ 6x + 4} \\ \underline{3x^6 + 12x^5 - 6x^4 + 6x^3 + 3x^2} \\ 2x^5 + 10x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 6x \phantom{+ 4} \\ \underline{-2x^5 - 8x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 2x} \\ 2x^4 + 7x^3 - 7x^2 + 4x + 4 \phantom{+ 1} \\ \underline{-2x^4 - 8x^3 + 4x^2 - 4x - 2} \\ -x^3 - 3x^2 \phantom{+ 4x} + 2 \end{array}$$

Da Latex das Ergebnis irgendwie nicht umbrechen kann, hier nochmals richtig, so dass mans lesen kann:

$$2x^3 - 3x^2 + 2x + 2 + \frac{-x^3 - 3x^2 + 2}{x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 2x + 2}$$

Hier darf der Nenner auf jedenfall nicht 0 werden, da wir sonst in einem undefinierten Bereich uns befinden würden.

$$x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_0 = -4,5189, x_1 = -0,5095$$

Diese beiden  $x_i$  gehören also nicht zum Definitionsbereich dazu.