

## 1 Konvergenz

Es sind die gegebenen Folgen auf Konvergenz zu untersuchen ...

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left( \frac{n^3 + 3n - 1}{n^2} \right) + 3n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4n^3 + 3n - 1}{n^3 + n^2} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 4 + \frac{-4n^2 + 3n}{n^3 + n^2} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 4 + \frac{n^3 \left( \frac{-4}{n} + \frac{3}{n^2} \right)}{n^3 \left( 1 + \frac{1}{n} \right)} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 4 + \frac{\overbrace{-4}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{n}_{\rightarrow 0}} + \frac{\overbrace{3}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{n^2}_{\rightarrow 0}} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right) \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

Die Folge hat also einen Grenzwert, der bei 4 liegt.

Wir vergleichen die Folge  $(\sum_{k=2}^n \frac{1}{\log_2 n})$  wieder mit der Harmonischen Reihe  $(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n})$ . Man sieht, dass  $\frac{1}{n} < \frac{1}{\log_2 n}$  für alle  $n$  gilt, da lineares Wachstum größer ist als logarithmisches und der Kehrwert also dementsprechend kleiner ist. Dies ist gerade das so genannte Minorantenkriterium für zwei Reihen mit nicht negativen Summanden. Es folgt hieraus, dass  $(\sum_{k=2}^n \frac{1}{\log_2 n})$  divergent ist, da auch  $(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n})$  divergent ist.

Hier gehen wir wie eben vor und vergleichen die Folge  $(\sum_{k=1}^n \frac{\log_2 k}{k})$  mit der Harmonischen Reihe. Wenn  $\frac{1}{k} < \frac{\log_2 k}{k}$  gilt, dann ist auch diese Folge divergent:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{k} &< \frac{\log_2 k}{k} \quad | * k \\
 1 &< \log_2 k, \forall k
 \end{aligned}$$

Dies ist eine wahre Aussage, da logarithmisches Wachstum größer ist als eine Konstante. Demnach ist auch diese Folge divergent.

## 2 Folgen

Da es sich bei  $(a_n)$  um einer konvergente Folge mit dem Grenzwert  $a$  handelt, folgt auch, dass die Folge monoton und beschränkt ist. Das heißt, dass für jede Teilfolge

und jedes  $a_i$  der Grenzwert auch  $a$  ist. Demnach gilt für  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right) = \frac{a + a + \dots + a}{n} = \frac{an}{n} = a$ .

Die Umkehrung dieser Aussage wäre, dass für Folgen  $\left( \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)$  mit dem Grenzwert  $a$  auch gilt, dass  $(a_n)$  auch nach  $a$  konvergiert. Diese Aussage ist aber falsch, wie man an folgendem Beispiel erkennt:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n}{n} \right) &= \frac{\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k}{n} = \frac{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}{n} = \frac{2}{n} \\ &\neq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) = 0 \neq \frac{2}{n} \end{aligned}$$

### 3 Viele Grenzen

Es sollen die Grenzwerte bestimmt werden, bzw. anderenfalls, dass diese nicht existieren.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\left( \frac{x+2}{x-3} \right)^{2x-1}}_{>1} \rightarrow \infty$$

Da der Bruch immer echt größer Eins ist, geht's  $\rightarrow \infty$  (Geometrische Reihe) und ist divergent.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x - 6} + x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 \left( 1 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2} \right)} + x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \underbrace{\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}}_{\rightarrow 1} + x \\ &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

Auch hier handelt es sich um einen divergenten Ausdruck.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 - x}}{x+3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 \left( 1 - \frac{1}{4x} \right)}}{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x \sqrt{1 - \frac{1}{4x}}}{x+3} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x \sqrt{1 - \frac{1}{4x}}}{x \left( 1 + \frac{3}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \sqrt{1 - \frac{1}{4x}}}{1 + \frac{3}{x}} = \frac{2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \frac{1}{4x}}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{3}{x} \right)} \\ &= \frac{2 \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{4x} \right)}}{1} = 2 \sqrt{1} = 2 \end{aligned}$$

Der Grenzwert ist 2.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x * \sin 2x * 3x}{2x * \sin 2x * 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \frac{\sin 2x}{2x} \frac{3x}{\sin 2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \frac{\sin 2x}{2x} \frac{3x}{2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \frac{\sin 2x}{2x} \frac{3}{2} \frac{x}{\sin x \cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \frac{\sin 2x}{2x} \frac{3}{2} \frac{1}{\frac{\sin x \cos x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{=y} \underbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}_{=z} \frac{3}{2} \frac{1}{\frac{\sin x}{x} \cos x} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} * \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2} * \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x} \cos x} \\
 &= \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

Da  $y = 3x$  und  $z = 2x$  gegen null gehen, wenn  $x$  gegen null geht, ist der Grenzwert  $\frac{3}{2}$ .

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x) * \cos(\sin x)}{x \cos(\sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \tan(\sin x) * \frac{\cos(\sin x)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \tan(\sin x) * \frac{\cos(\sin x) * \sin(\sin x) * \sin x}{x * \sin(\sin x) * \sin x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \tan(\sin x) * \frac{\cos(\sin x)}{\sin(\sin x)} \frac{\sin(\sin x)}{\sin(x)} \frac{\sin x}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \tan(\sin x) * \frac{1}{\tan(\sin x)} \frac{\sin(\sin x)}{\sin(x)} \frac{\sin x}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin(x)} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin(\sin x)}{\sin(x)}}_{=y} * \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} * \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1
 \end{aligned}$$

Hier ist der Grenzwert 1.  $y$  geht auch gegen null, da der  $\sin x$  für  $x \rightarrow 0$  auch gegen 0 geht.