

## 1 Zwischenwertsatz

Es soll gezeigt werden, dass für jede stetige Funktion  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  es einen Fixpunkt  $c \in [a, b]$  gibt mit  $f(c) = c$ .

Falls  $f(a) = a$  oder  $f(b) = b$ , dann sind wir natürlich schon gleich fertig. Andernfalls muss also  $f(a) > a$  und  $f(b) < b$  sein. Man betrachte eine neue Funktion  $F(x) = f(x) - x$ . Es gilt mit unseren vorherigen Annahmen  $F(a) > 0$  und  $F(b) < 0$ . Hieraus folgt direkt, dass eine Nullstelle existiert in  $F$ , auf Grund des Mittelwertsatzes. Und das bedeutet es gibt ein Fixpunkt  $c$  in  $f$ .

## 2 Eigenschaften von Funktionen untersuchen

Es sind die sachfolgenden Funktionen auf Definitionsbereich, Nullstellen, Polstellen, eventuelle Symmetrien, das Verhalten im Unendlichen und Asymptoten zu untersuchen.

a)  $f(x) = \frac{x^4}{(x^2-1)|x|}$

**Definitionsbereich** Da der Nenner nicht null werden darf, müssen die Stellen  $-1, 0, 1$  aus dem Definitionsbereich genommen werden:  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ .

**Nullstellen** Der Zähler wird dann null, wenn  $x = 0$  ist. Diese Stelle ist aber nicht definiert, also existiert keine Nullstelle.

**Pole** Jede Nullstelle des Nenners in gekürzter Darstellung definiert eine Polstelle. Für  $x < 0$  ergibt sich  $f(x) = \frac{x^4}{(x^2-1)-x} = \frac{x^3}{1-x^2}$ . Hieraus folgt, dass  $-1$  und  $1$  Polstellen sein müssen. Gucken wir uns noch den anderen Fall an:

Für  $x \geq 0$  ergibt sich  $f(x) = \frac{x^4}{(x^2-1)x} = \frac{x^3}{x^2-1}$ . Auch hier sind Polstellen bei  $-1$  und  $1$ . Da es sich jeweils nur um eine einfache Nullstelle handelt, liegt ein Pol mit Vorzeichenwechsel vor. Man sieht sich die Werte nahe der Polstellen an und erhält:

$$\begin{array}{ll} -1^- \rightarrow +\infty & 1^- \rightarrow -\infty \\ -1^+ \rightarrow -\infty & 1^+ \rightarrow +\infty \end{array}$$

**Symmetrie** Nach der bisherigen Untersuchung sieht alles ziemlich nach Achsensymmetrie aus:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-x) \\ \frac{x^4}{(x^2-1)|x|} &= \frac{(-x)^4}{((-x)^2-1)|-x|} \\ \Leftrightarrow \frac{x^4}{(x^2-1)|x|} &= \frac{x^4}{(x^2-1)|x|} \text{ bei geraden Exponenten und Betrag fällt - weg.} \end{aligned}$$

Die Funktion ist also Achsensymmetrisch.

### Verhalten im Unendlichen

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{(x^2 - 1)|x|} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{(x^2 - 1) - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + \frac{x}{x^2 + 1} \rightarrow \infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{(x^2 - 1)|x|} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{(x^2 - 1)x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{x}{x^2 + 1} \rightarrow \infty\end{aligned}$$

**Asymptoten** Da der Grad des Zählers um eins größer ist als der des Nenners gibt es eine schräge Asymptote. Diese wird per Polynomdivision bestimmt. Wegen des Betrages machen wir eine Fallunterscheidung.

$$x < 0 \quad \left( \begin{array}{r} x^4 \\ -x^4 + x \\ \hline x \end{array} \right) \div (-x^3 + 1) = -x + \frac{x}{-x^3 + 1}$$

$$x \geq 0 \quad \left( \begin{array}{r} x^4 \\ -x^4 + x \\ \hline x \end{array} \right) \div (x^3 - 1) = x + \frac{x}{x^3 - 1}$$

Wie man sieht, entspricht dies genau  $|x|$ .

**Skizze** Anhand dieser Informationen kann man eine Skizze erstellen:

b)  $f(x) = |x^2 - 1| + |x| - 1$

**Definitionsbereich** Der Definitionsbereich entspricht hier  $D = \mathbb{R}$ .

**Nullstellen** Da es sich mit den Beträgen schlecht rechnen lässt, machen wir eine Fallunterscheidung:

$$x^2 - 1 \geq 0 \wedge x \geq 0 \Rightarrow x \geq 1:$$

$$0 = x^2 - 1 + x - 1 \Rightarrow x_0 = 1, (x_1 = -2)$$

$$x^2 - 1 < 0 \wedge x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1:$$

$$0 = -(x^2 - 1) + x - 1 = -x^2 + x \Rightarrow x_2 = 0, (x_3 = 1)$$

$$x^2 - 1 < 0 \wedge x < 0 \Rightarrow x < 0:$$

$$0 = -(x^2 - 1) - x - 1 = -x^2 - x \Rightarrow x_4 = -1, (x_5 = 0)$$

$$x^2 - 1 \geq 0 \wedge x < 0 \Rightarrow x < 0 \wedge x \geq 1:$$

$$0 = x^2 - 1 - x - 1 = x^2 - x - 2 \Rightarrow (x_6 = -1, x_7 = 2)$$

Es ergeben sich also  $-1, 0, 1$  als Nullstellen.

**Pole** Gibt es hier nicht, da es sich nicht um eine gebrochen rationale Funktion handelt.

**Symmetrie** Auch hier sieht das bisherige verdammt doll nach Achsensymmetrie aus:

$$f(x) = f(-x)$$

$$|x^2 - 1| + |x| - 1 = |(-x)^2 - 1| + |-x| - 1$$

$$\Leftrightarrow |x^2 - 1| + |x| - 1 = |x^2 - 1| + |x| - 1$$

Auch hier fällt wieder das Minus durch das Quadrieren bzw. den Betrag weg. Es handelt sich also tatsächlich um Achsensymmetrie.

**Verhalten im Unendlichen**

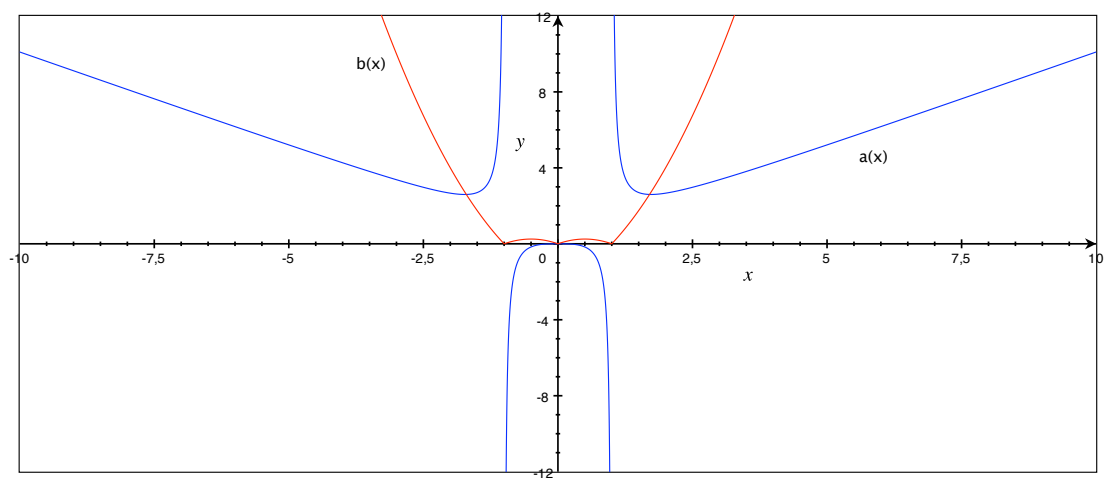
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} |x^2 - 1| + |x| - 1 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 1 - x - 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - x - 2 \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} |x^2 - 1| + |x| - 1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 1 + x - 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x - 2 \rightarrow \infty \end{aligned}$$

**Asymptoten** Asymptoten gibt es auch nur bei gebrochen rationalen Funktionen ...

**Skizze** Anhand dieser Informationen kann man eine Skizze erstellen:

Geplottet sehen die Funktionen wie folgt aus:



### 3 Ableitungen

a)  $f(x) = \cos^3 x$

$$f'(x) = 3 \cos^2 x \cdot (-\sin x)$$

b)  $f(x) = \frac{(a^2+x^2)^2}{(a^3+x^3)^3}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2(a^2+x^2) \cdot 2x \cdot (a^3+x^3)^3) - (3(a^3+x^3)^2 \cdot 3x^2 \cdot (a^2+x^2)^2)}{((a^3+x^3)^3)^2} \\ &= \frac{(4x(a^2+x^2) \cdot (a^3+x^3)) - (9x^2 \cdot (a^2+x^2)^2)}{(a^3+x^3)^4} \\ &= \frac{((a^2+x^2)) \cdot (4x(a^3+x^3)) - 9x^2(a^2+x^2)}{(a^3+x^3)^4} \end{aligned}$$

c)  $f(x) = \tan \sqrt{2 - \sin^2 x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\cos^2 \sqrt{2 - \sin^2 x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2 - \sin^2 x}} \cdot (-2 \sin x) \cdot (-\cos x) \\ &= \frac{(-2 \sin x) \cdot (-\cos x)}{\cos^2 \sqrt{2 - \sin^2 x} \cdot 2\sqrt{2 - \sin^2 x}} \\ &= \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 \sqrt{2 - \sin^2 x} \cdot \sqrt{2 - \sin^2 x}} \end{aligned}$$

d)  $f(x) = \frac{x^2}{\cos x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x \cdot \cos x) - (-\sin x \cdot x^2)}{\cos^2 x} = \frac{(2x \cdot \cos x) + \sin x \cdot x^2}{\cos^2 x} \\ &= \frac{x(2 \cos x + x \sin x)}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

#### 4 Potenzregel

Es soll die Potenzregel mit Hilfe der Produktregel bewiesen werden.  
Man führt einen Beweis durch vollständige Induktion.

**Induktionsanfang**  $n = 1$  und  $f(x) = x^1$ . Dann ist

$$f'(x) = 1 = 1 \cdot (x^0)$$

**Induktionsschritt** Es gelte für  $f(x) = x^n$  das die Ableitung  $f'(x) = nx^{n-1}$  lautet.  
Dann soll auch für  $f(x) = x^{n+1}$   $f'(x) = (n+1)x^n$  gelten.

$$f(x) = x^{n+1} = x \cdot x^n \Rightarrow f'(x) = 1x^n + nx^{n-1}x = x^n + nx^n = (n+1)x^n$$

□