

Mathematik für Informatiker II
(Frank Hoffmann)

Abgabe bis Donnerstag, den 24. Mai 2007, 13⁰⁰

1. **Interpolation** (3 Punkte)

Geben Sie für jedes $n \geq 2$ ein Polynom $p_n(x) \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad n an, so dass gilt:

$$p_n(2) = -2, \quad p_n(-1) = 1, \quad p_n(3) = 1$$

Begründen Sie kurz Ihre Konstruktion.

2. **Polynomdivision** (3 Punkte)

Bestimmen Sie den ganzrationalen und den echt gebrochen rationalen Anteil von $\frac{p(x)}{q(x)}$ für die folgenden Polynome aus $\mathbb{C}[x]$:

$$p(x) = x^2 + (1 - i)x + (2 + i), \quad q(x) = (1 + i)x + (1 + 2i)$$

3. **Gemischtes Komplexes** (8 Punkte)

(a) Stellen Sie die komplexe Zahl $z = -1 + i$ in trigonometrischer Form und in Exponentialform dar.

(b) Finden Sie die komplexen Zahlen $z = x + iy$, die die folgende Gleichung erfüllen.

$$z\bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 4 - 3i$$

(c) Zeigen Sie, dass die folgende Menge abgeschlossen gegen Multiplikation ist.

$$\{a^2 + b^2 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

Hinweis: Sie müssen also zeigen, dass für beliebige ganze Zahlen a, b, c, d sich das Produkt $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ darstellen lässt als $x^2 + y^2$, wobei x, y wiederum ganze Zahlen sind. Es ist hilfreich, sich den Zusammenhang zum Betrag komplexer Zahlen klar zu machen.

(d) Zeigen Sie, dass für die Beträge komplexer Zahlen z und w die Dreiecksungleichung gilt:

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

(e) Zeigen Sie, dass die Menge der komplexen Zahlen mit Betrag 1 bezüglich Multiplikation eine kommutative Gruppe bilden.

4. **Rechnen im Komplexen** (6 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils alle komplexen Lösungen für die Gleichung

$$4x^4 + 4x^3 - 7x^2 + x - 2 = 0$$

als auch für Gleichung

$$x^6 + 1 = \sqrt{3}i$$