

1 L'Hospital

Es sollen die Grenzwerte berechnet werden ...

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x e^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{e^{x-1}} = 1 \cdot 0 = 0$$

Der Grenzwert beträgt 0.

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln^2 x} &\stackrel{l'Hospital}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{4 \ln x \cdot \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{4 \ln x} \\ &\stackrel{l'Hospital}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{4}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{8\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{8} = \infty \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist also divergent, und strebt gegen ∞ .

c)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - 1 + x^2}{x^4} &\stackrel{l'Hospital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} \cdot (-2x) + 2x}{4x^3} \\ &\stackrel{l'Hospital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} \cdot (-2x)^2 - 2e^{-x^2} + 2}{12x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} \cdot 4x^2 - 2e^{-x^2} + 2}{12x^2} \\ &\stackrel{l'Hospital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} \cdot (-2x) \cdot 4x^2 + 8x \cdot e^{-x^2} - 2e^{-x^2} \cdot (-2x)}{24x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2}(-8x^3) + 8xe^{-x^2} + 4xe^{-x^2}}{24x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{-x^2}(-8x^2 + 12)}{24x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2}(-8x^2 + 12)}{24} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Der Grenzwert beträgt hier 0,5.

d)

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos(ax)} - \sqrt{\cos(bx)}}{x^2} \\
 & \stackrel{l'Hospital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(\cos(ax))^{-1/2} \cdot (-\sin(ax)) \cdot a - (\frac{1}{2}(\cos(bx))^{-1/2} \cdot (-\sin(bx)) \cdot b)}{2x} \\
 & = \frac{-\frac{a}{2}(\cos(ax))^{-1/2} \sin(ax) + \frac{b}{2}(\cos(bx))^{-1/2} \sin(bx)}{2x} \\
 & \stackrel{l'Hospital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\frac{a}{4}(\cos(ax))^{-3/2}(-\sin(ax)) \cdot a}^{\rightarrow 0} + \overbrace{\cos(ax) \cdot a \cdot \frac{-a}{2}(\cos(ax))^{-1/2}}^{\rightarrow -\frac{a^2}{2}}}{2} \\
 & \quad + \frac{\overbrace{-\frac{b}{4}(\cos(bx))^{-3/2}(-\sin(bx)) \cdot b}^{\rightarrow 0} + \overbrace{\cos(bx) \cdot b \cdot \frac{b}{2}(\cos(bx))^{-1/2}}^{\rightarrow \frac{b^2}{2}}}{2} \\
 & = \frac{-a^2 + b^2}{4}
 \end{aligned}$$

Der Grenzwert ist hier also abhängig von a und b und liegt bei $\frac{-a^2+b^2}{4}$.

e)

2 Mittelwertsatz

Es ist zu zeigen, dass wenn ein reelles Polynom von Grad n mit n unterschiedliche Nullstellen ein lokales Extremum c hat, dieses Extremum dann zwischen den äußersten Nullstellen x_1 und x_n liegt.

Da es sich um ein Polynom handelt, ist bekannt, dass die Funktion stetig und auch differenzierbar ist. Man betrachte also den Verlauf im Intervall $[x_1, x_n]$. Nach dem Mittelwertsatz gilt

$$\begin{aligned}
 \exists y \in (x_1, x_n) : f'(y) &= \frac{f(x_n) - f(x_1)}{x_n - x_1} \text{ also} \\
 f'(y) &= \frac{0 - 0}{x_n - x_1} = 0
 \end{aligned}$$

Damit sind wir fertig, da für das lokale Extremum $f'(c) = 0$ gelten muss, was ja gerade gezeigt wurde, dass eine solche Stelle zwischen den Grenzen gefunden wird. \square

3 Newton-Verfahren

Es soll mit Hilfe der Formel $\tan \frac{x}{4} - \cot \frac{x}{4}$ die Zahl π näherungsweise (auf 6 Nachkommastellen) bestimmt werden. Da wie man leicht sieht π eine Nullstelle von der Formel ist, kann das Newton-Verfahren hier angewandt werden.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Man rechnet also erstmal die Ableitung aus:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{4}} * \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{\sin^2 \frac{x}{4}} * \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4 \cos^2 \frac{x}{4}} + \frac{1}{4 \sin^2 \frac{x}{4}}$$

Und los geht das fröhliche Einsetzen:

$$x_1 = 5$$

$$f(5) = \tan \frac{5}{4} - \cot \frac{5}{4} = 2,6772963$$

$$f'(5) = \frac{1}{4 \cos^2 \frac{5}{4}} + \frac{1}{4 \sin^2 \frac{5}{4}} = 2,7919781$$

$$x_2 = 5 - \frac{2,6772963}{2,7919781} = 4,0410757$$

$$f(4,0410757) = \tan \frac{4,0410757}{4} - \cot \frac{4,0410757}{4} = 0.9654727$$

$$f'(4,0410757) = \frac{1}{4 \cos^2 \frac{4,0410757}{4}} + \frac{1}{4 \sin^2 \frac{4,0410757}{4}} = 1.2330344$$

$$x_3 = 4,0410757 - \frac{0.9654727}{1.2330344} = 3.2580702$$

$$f(3.2580702) = \tan \frac{3.2580702}{4} - \cot \frac{3.2580702}{4} = 0.1166095$$

$$f'(3.2580702) = \frac{1}{4 \cos^2 \frac{3.2580702}{4}} + \frac{1}{4 \sin^2 \frac{3.2580702}{4}} = 1.0033994$$

$$x_4 = 3.2580702 - \frac{0.1166095}{1.0033994} = 3.1418559$$

$$\begin{aligned}f(3.1418559) &= \tan \frac{3.1418559}{4} - \cot \frac{3.1418559}{4} = 0.0002632 \\f'(3.1418559) &= \frac{1}{4 \cos^2 \frac{3.1418559}{4}} + \frac{1}{4 \sin^2 \frac{3.1418559}{4}} = 1.0000000 \\x_5 &= 3.1418559 - \frac{0.0002632}{1.0000000} = 3.1415927\end{aligned}$$

4 Min-Max

Mit der üblichen Methode, nämlich die Nullstelle der 1. Ableitung zu berechnen, kommt man hier nicht weit. Dies ergibt sich nämlich als

$$f'(x) = \frac{2(2x - 2)}{3\sqrt[3]{x^2 - 2x}}$$

Und hiervon ist die Nullstelle 1, was sich leicht am Zähler erkennen lässt. 1 liegt jedoch nicht im Intervall, fällt also raus.

Also anders ...

Da es sich um eine Wurzelfunktion handelt, kann es keine negativen Werte geben. 0 kann also nur das kleinste sein. Jetzt ist die Frage, ob $f(x) = 0$ im Intervall wird?

$$\begin{aligned}f(x) &\stackrel{!}{=} 0 \\0 &= \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2} \quad |()^3 \\0 &= (x^2 - 2x)^2 \\0 &= x^4 - 4x^3 + 4x^2 \\0 &= x^2(x^2 - 4x + 4) \\&\Rightarrow x_{1/2} = 0 \\&\Rightarrow x_{3/4} = 2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4} = 2\end{aligned}$$

Es tritt also einmal eine Nullstelle auf. Damit ist der minimale Funktionswert bestimmt, dieser liegt bei $x = 0$ und beträgt 0.

5 Kegel