

## 1 Überlagertes

Es sollen die beiden gegebenen Schwingungen überlagert werden. Dazu werden erstmal beide Kurven in  $\cos$ -Darstellung gebracht:

$$u_1(t) = 20 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{10}\right) = 20 \cos\left(\pi t - \frac{2}{5}\pi\right)$$

$$u_2(t) = 15 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

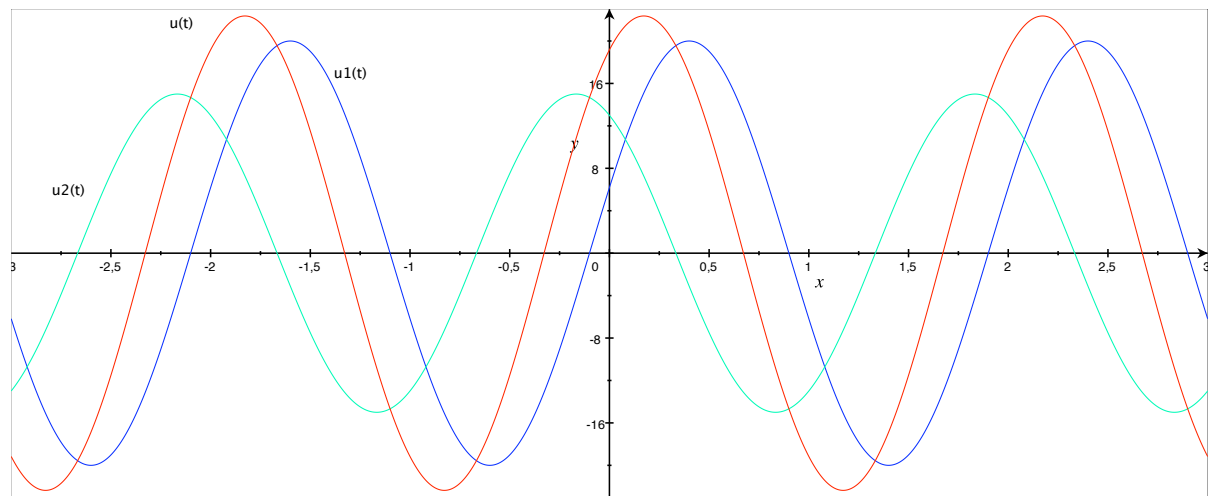
Die beiden Schwingungen können auch als Realteile einer komplexen Zahl  $\hat{u}_i(t) = e^{i\pi t + \phi_i}$  interpretiert werden. Die komplexen Zahlen können dann addiert werden, und der Realteil der Summe entspricht dann der gesuchten Überlagerung  $u(t)$ .

$$\begin{aligned}\hat{u}_1(t) &= 20e^{i(\pi t - \frac{2}{5}\pi)} \\ \hat{u}_2(t) &= 15e^{i(\pi t + \frac{\pi}{6})} \\ \hat{u}(t) &= \hat{u}_1(t) + \hat{u}_2(t) \\ &= 20e^{i(\pi t - \frac{2}{5}\pi)} + 15e^{i(\pi t + \frac{\pi}{6})} \\ &= 20e^{i\pi t}e^{-i\frac{2}{5}\pi} + 15e^{i\pi t}e^{i\frac{\pi}{6}} \\ &= e^{i\pi t} \left( 20e^{-i\frac{2}{5}\pi} + 15e^{i\frac{\pi}{6}} \right) \\ &= e^{i\pi t} \left( 20 \cos\left(-\frac{2}{5}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{2}{5}\pi\right) + 15 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) \\ &= e^{i\pi t} \left( 6,18 - i19,02 + \frac{15\sqrt{3}}{2} + i7,5 \right) \\ &= e^{i\pi t} \underbrace{(19,17 - i11,52)}_{\text{in Exponentialform umwandeln}} \\ |z| &= \sqrt{19,17^2 + (-11,52)^2} = 22,36 \quad \arg z = -\arccos \frac{19,17}{22,36} = -0,5411 \\ \hat{u}(t) &= e^{i\pi t} * 22,36e^{i-0,3411} \\ &= 22,36e^{i(\pi t - 0,3411)} \\ &= 22,36 (\cos(\pi t - 0,3411) + i \sin(\pi t - 0,3411))\end{aligned}$$

Damit ergibt sich als Lösung

$$u(t) = 22,36 \cos(\pi t - 0,3411)$$

Graphisch sieht das dann so aus ...



## 2 Viele Häufungspunkte

Jede positive ganze Zahl  $n$  lässt sich als  $n = 2^r(2s+1)$  eindeutig darstellen mit  $r, s \in \mathbb{N}$ . Im Umkehrschluss kann jede ganze Zahl durch das Wählen von  $r$  und  $s$  erzeugt werden. Daraus folgt, dass auch jede positive rationale Zahl mit  $\frac{r}{s+1}$  erzeugt werden kann. Nun ist aber hinlänglich bekannt, dass durch unterschiedliche  $r$  und  $s$  ein und derselbe Bruch dargestellt werden können, z.B.  $r_1 = 4, s_1 = 5 \Rightarrow \frac{4}{6}$  und  $r_2 = 2, s_2 = 2 \Rightarrow \frac{2}{3}$ . Es gibt also für jeden Bruch unendlich viele Darstellungsmöglichkeiten. Und somit liegen auch unendlich Folgenglieder in einer  $\epsilon$ -Umgebung um einer beliebigen reellen Zahl. Demnach ist jede positive reelle Zahl Häufungspunkt der Folge.

## 3 Ganzzahlige Folgen

Der Beweis wird in zwei Teile unterteilt. Zuerst wird gezeigt, dass aus der Konvergenz die Konstanz ab einem Folgenglied folgt. Im zweiten Teil folgt dann die andere Richtung.

**konvergent  $\Rightarrow$  konstant** Die Folge  $a_n$  sei konvergent. D.h. die Folge ist monoton wachsend bzw. fallend und beschränkt:  $\forall a_n : |a_n| \leq |a_{n+1}| \wedge \exists n_0 \forall a_n \geq n_0 : a_n \leq a$  Daraus folgt, dass  $a$  das konstantes Folgenglied ist und somit die Folge konstant ist.

**konstant  $\Rightarrow$  konvergent** Die Folge  $a_n$  sei konstant ab einem bestimmten Folgenglied, d.h.  $\exists n_0 \forall a_n \geq n_0 : a_n = c$ . Damit ist  $c$  auch eine Schranke der Folge.

Jetzt folgt zur Konvergenz nur noch die Monotonie. Und diese folgt impliziet, dadurch, dass sie ab einem bestimmten Folgenglied  $a_i$  konstant ist.

Da beide Richtungen gezeigt wurden, gilt die Aussage.

#### 4 Grenzwertiges

a) Es soll die Folge  $\sqrt{5}, \sqrt{5\sqrt{5}}, \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}, \dots$  auf Konvergenz überprüft werden. Als erstes wird probiert, eine geschlossene Formel zu finden, mit der man dann den Limes ausrechnen kann. Man berechnet also die ersten Folgenglieder ...

$$a_1 = \sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$$

$$a_2 = \sqrt{5\sqrt{5}} = (5 * 5^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{3}{2} * \frac{1}{2}} = 5^{\frac{3}{4}}$$

$$a_3 = \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}} = (5 * (5 * 5^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = (5 * 5^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{7}{4} * \frac{1}{2}} = 5^{\frac{7}{8}}$$

Wie man sieht kann  $a_n = 5^{\frac{2^n - 1}{2^n}}$  angenommen werden. Damit berechnen wir jetzt den Limes, wenn  $n$  gegen unendlich geht:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 5^{\frac{2^n - 1}{2^n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 5^{\frac{2^n (1 - \frac{1}{2^n})}{2^n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 5^{1 - \frac{1}{2^n}} \right) = 5$$

Die Folge konvergiert zu 5, da  $\frac{1}{2^n}$  eine Nullfolge ist.

b) Es soll  $a_n = -\frac{n}{2} + \frac{1}{n+2} \sum_{i=1}^n i$  auf Konvergenz gegen unendlich überprüft werden. Da uns die Summe beim Rechnen behindern wird, ersetzen wir sie einfach durch die bekannte geschlossene Formel:  $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ . Somit erhält man  $a_n = -\frac{n}{2} + \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n+2}$ . Und jetzt kann schön der Limes berechnet werden ...

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\frac{n}{2} + \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n+2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\frac{n}{2} + \frac{n(n+1)}{2(n+2)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{-n(n+2) + n(n+1)}{2(n+2)} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{-n^2 - 2n + n^2 + n}{2n + 4} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{-n}{n(2 + \frac{4}{n})} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{-1}{2 + \frac{4}{n}} \right) = \frac{-1}{\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + \frac{4}{n})} = \frac{-1}{2 + \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{4}{n})}_{\text{Nullfolge}}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Die Folge konvergiert also und der Grenzwert liegt bei  $-0,5$  für  $n \rightarrow \infty$ .

c) Durch einsetzen erhält man den Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}})$ . Rechnerisch ist das genauso trivial und wird deshalb hier weggelassen ;-)

d) Bei der Konvergenzuntersuchung der Folge  $a_n = \frac{1}{1+a_{n-1}}$  mit  $a_0 = 1$  muss als erstes wieder eine geschlossene Formel gesucht werden. Wir schauen uns wieder die ersten Folgenglieder an ...

$$a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$a_3 = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$a_4 = \frac{1}{1+\frac{3}{5}} = \frac{5}{8}$$

Nun kann schon  $a_n = \frac{fib(n-1)}{fib(n)}$  vermutet werden, wobei  $fib(n)$  der  $n$ -ten Fibonaccizahl entspricht. Dies entspricht  $\frac{1}{\frac{fib(n)}{fib(n-1)}}$  und nun kann man das Wissen aus dem Wikipedia-artikel über die Fibonacci-Folge<sup>1</sup> nutzen, der da aussagt, dass der Quotient von zwei aufeinander folgenden Fibonaccizahlen sich dem goldenen Schnitt  $\Phi$  annähert für große  $n$ .

$$\frac{fib(n)}{fib(n-1)} \approx \frac{\Phi^{n+1}}{\Phi^n} = \Phi \approx 1,608$$

Demnach ergibt sich als Grenzwert für unsere Folge  $\frac{1}{\Phi} \approx 0,618$ .

---

<sup>1</sup>[http://de.wikipedia.org/wiki/Fibonacci-Folge#Verwandtschaft\\_mit\\_dem\\_Goldenen\\_Schnitt](http://de.wikipedia.org/wiki/Fibonacci-Folge#Verwandtschaft_mit_dem_Goldenen_Schnitt)