

Mathematik für Informatiker II
(Leif Harrass)

1. **Einheitswurzeln** (8 Punkte) Bezeichne $\zeta_{n,k}$ die komplexe Zahl $e^{i2k\pi/n}$. Beweisen Sie:

(a) $\forall n > 0, k \geq 0, d > 0 \quad \zeta_{dn,1}^{dk} = \zeta_{n,1}^k$.

Wir benutzen die Definition und erhalten

$$\zeta_{dn,1}^{dk} = (e^{i2\pi/dn})^{dk} = (e^{i2\pi/n})^k = \zeta_{n,1}^k.$$

(b) Für gerades $n > 0$ gilt $\zeta_{n,1}^{n/2} = -1$.

Nun verwenden wir die trigonometrische Darstellung und damit ergibt sich

$$\zeta_{n,1}^{n/2} = (e^{i2\pi/n})^{n/2} = e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1.$$

(c) Für gerades $n > 0$:

$$\{\zeta_{n,0}^2, \dots, \zeta_{n,n-1}^2\} = \{\zeta_{n/2,0}, \dots, \zeta_{n/2,n/2-1}\}.$$

Wir stellen zunächst fest, dass in der linken Menge n Elemente aufgelistet sind, während es in der rechten Menge lediglich $n/2$ viele sind. Wir vermuten daher, dass in der linken Menge jedes Element doppelt aufgeführt ist und ermitteln die Gleichheit beider Mengen in zwei Schritten: Zunächst zeigen wir die Gleichheit der ersten $n/2$ Elemente beider Mengen und im Anschluss bestimmen wir die doppelt aufgeführten Elemente.

Es gilt einerseits für beliebiges $k \geq 0$

$$\zeta_{n,k}^2 = (e^{i2k\pi/n})^2 = e^{i4k\pi/n} = (e^{i2\pi/(n/2)})^k = \zeta_{n/2,k}$$

und andererseits haben wir

$$\begin{aligned} \zeta_{n,k+n/2}^2 &= (e^{i2(k+n/2)\pi/n})^2 = (e^{i2k\pi/n} e^{i2(n/2)\pi/n})^2 = \\ &= (e^{i2k\pi/n})^2 (e^{i\pi})^2 = (e^{i2k\pi/n})^2 (-1)^2 = \zeta_{n,k}^2. \end{aligned}$$

Damit ist die Gleichheit beider Mengen bewiesen.

(d) Für $n > 0$ und positives ganzes $k < n$ gilt: $\sum_{j=0}^{n-1} (\zeta_{n,k})^j = 0$

Wir erinnern uns an die Formel für geometrische Summe für $q \neq 1$:

$$\sum_{j=0}^{n-1} q^j = \frac{1-q^n}{1-q}$$

Wir stellen fest, dass wir ohne weiteres für q auch komplexe Zahlen $z \neq 1$ einsetzen können und erhalten damit sofort:

$$\sum_{j=0}^{n-1} (\zeta_{n,k})^j = \frac{1-\zeta_{n,k}^n}{1-\zeta_{n,k}} = \frac{1-(e^{i2k\pi/n})^n}{1-e^{i2k\pi/n}} = \frac{1-1}{1-e^{i2k\pi/n}} = 0,$$

wobei wir im vorletzten Schritt den Aufgabenteil (b) verwendet haben.

2. **Trigonometrisches** (4 Punkte)

Wird korrigiert.

3. **Komplexe Zahlenebene** (4 Punkte)

Wird korrigiert.

4. **Umrechnung** (4 Punkte) Man berechne Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Argument von

$$\left(\frac{2+i}{1-(1+i)^2} \right)^9 \quad \text{und} \quad \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{99}$$

$$\text{Es gilt } z = \left(\frac{2+i}{1-(1+i)^2} \right)^9 = \left(\frac{2+i}{1-(1^2+2i-1)} \right)^9 = \left(\frac{2+i}{1+2i} \right)^9 = \left(\frac{(2+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} \right)^9 = (4/5 - 3/5i)^9.$$

Wir wandeln die komplexe Zahl z' innerhalb der Klammern in Exponentialform um. Wir erkennen zunächst, dass $|z'| = \sqrt{(4/5)^2 + (-3/5)^2} = 1$ gilt. Das Argument ϕ' von z' ergibt sich durch $\phi' = -\arccos(4/5) \approx -0.6435$. Für komplexe Zahlen in Exponentialform heisst Potenzieren, dass man Beträge multipliziert und Argumente addiert. Damit erhält man $z = (z')^9 = (1e^{-i\arccos 4/5})^9 \approx (e^{-0.6435i})^9 = e^{0.4917i}$, wobei wir im letzten Schritt $-0.6435 \cdot 9 = -5.7915$ modulo 2π gerechnet haben, um mit dem Argument im richtigen Intervall zu landen. Umrechnen von Exponentialform in algebraische Form liefert uns Real- und Imaginärteil von z .

Mit $r = |z| = 1$ und $\phi = 0.4917$ ergibt sich also $z = r \cos \phi + i \cdot r \sin \phi = \cos(0.4917) + i \sin(0.4917) = 0.8815 + 0.4721i$ und damit $\operatorname{Re}(z) = 0.8815$ und $\operatorname{Im}(z) = 0.4721$.

Die zweite Aufgabe wird korrigiert.