

1 Ungleichungen

a) Der Beweis wird per vollständiger Induktion über die Anzahl der reellen Zahlen n geführt.

Induktionsanfang $n=1$

$$(1 + x_1) \geq 1 + x_1$$

Induktionsschritt $n \rightarrow n+1$ Es gelte $(1+x_1)(1+x_2) \dots (1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\dots+x_n$, so soll auch $(1+x_1)(1+x_2) \dots (1+x_n)(1+x_{n+1}) \geq 1+x_1+x_2+\dots+x_n+x_{n+1}$ gelten.

$$\begin{aligned} (1+x_1)(1+x_2) \dots (1+x_n)(1+x_{n+1}) &\stackrel{I.V.}{\geq} (1+x_1+x_2+\dots+x_n)(1+x_{n+1}) \\ &= (1+x_1+x_2+\dots+x_n) + (x_{n+1}+x_1x_{n+1}+x_2x_{n+1}+\dots+x_nx_{n+1}) \\ &\geq 1+x_1+x_2+\dots+x_n+x_{n+1} \end{aligned}$$

Die Aussage für die Vorzeichen ist notwendig, da z.B. für $x_1 = -0,99, x_2 = 3$ folgen würde:

$$(1 - 0,99)(1 + 3) = 0,04 \geq 3,01$$

Widerspruch!

□

b) Auch hier wird der Beweis per vollständiger Induktion über n geführt.

Induktionsanfang $n=1$

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Induktionsschritt $n \rightarrow n+1$ Es gelte $\frac{1}{2} \frac{3}{4} \dots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, so soll auch

$$\frac{1}{2} \frac{3}{4} \dots \frac{2n-1}{2n} \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} < \frac{1}{\sqrt{2(n+1)+1}} \text{ gelten.}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{3}{4} \dots \frac{2n-1}{2n} \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} &\stackrel{I.V.}{<} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \frac{2n+1}{2n+2} \end{aligned}$$

Abschätzung:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \frac{2n+1}{2n+2} &< \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \\ \frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2} &< \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \quad | \cdot \sqrt{2n+3} \\ \frac{\sqrt{2n+1} \cdot \sqrt{2n+3}}{2n+2} &< 1 \quad | ()^2 \\ \frac{(2n+1)(2n+3)}{(2n+2)^2} &< 1 \\ \frac{4n^2 + 8n + 3}{4n^2 + 8n + 4} &< 1\end{aligned}$$

Die Abschätzung stimmt, da der Zähler immer um eins kleiner ist als der Nennern, und somit ist der Bruch immer < 1 .

Und somit gilt:

$$\frac{1}{2} \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} < \frac{1}{\sqrt{2(n+1)+1}}$$

□

c) Es soll $n^{n+1} > (n+1)^n$ bewiesen werden.

$$\begin{aligned}n^{n+1} &> (n+1)^n \stackrel{\text{bin. Formel}}{=} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} n^{n-i} 1^i \\ &= n^n + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} (n)^{n-i} 1^i + 1\end{aligned}$$

2 Absolutes I

a) Der Beweis wird per vollständiger Induktion über n geführt.

Induktionsanfang $n=1$

$$\begin{aligned}|x+x_1| &\geq |x| - |x_1| \quad | + |x_1| \\ |x+x_1| + |x_1| &\geq |x| \quad | ()^2 \text{ ist möglich, da beide Seite } > 0 \\ (|x+x_1| + |x_1|)^2 &\geq x^2 \\ |x+x_1|^2 + 2||x+x_1||x_1| + x_1^2 &\geq x^2 \\ x^2 + 2||x||x_1| + x_1^2 + 2|xx_1 + x_1^2| + x_1^2 &\geq x^2 \quad | - x^2 \\ 2||x||x_1| + x_1^2 + 2|xx_1 + x_1^2| + x_1^2 &\geq 0\end{aligned}$$

Dies ist eine wahre Aussage, da es sich um eine Summe mit Quadraten und Beträgen handelt.

Induktionsschritt $n \rightarrow n+1$ Es gelte $|x+x_1+\dots+x_n| \geq |x| - (|x_1|+|x_2|+\dots+|x_n|)$,
so soll auch $|x+x_1+\dots+x_n+x_{n+1}| \geq |x| - (|x_1|+|x_2|+\dots+|x_n|+|x_{n+1}|)$
gelten.

$$\begin{aligned} |x| - (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| + |x_{n+1}|) &= |x| - (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|) - |x_{n+1}| \\ &\stackrel{I.V.}{\leq} |x+x_1+\dots+x_n| - |x_{n+1}| \end{aligned}$$

Abschätzung: Gilt $|x+x_1+\dots+x_n| - |x_{n+1}| \leq |x+x_1+\dots+x_n+x_{n+1}|$?
Ja, weil es als

$$\begin{aligned} |\underbrace{x+x_1+\dots+x_n}_{=y}| - |x_{n+1}| &\leq |\underbrace{x+x_1+\dots+x_n+x_{n+1}}_{=y}| \\ \Leftrightarrow |y| - |x_{n+1}| &\leq |y+x_{n+1}| \end{aligned}$$

geschrieben werden kann. Hier gilt das gleiche wie beim Induktionsanfang.
Also folgt:

$$|x+x_1+\dots+x_n+x_{n+1}| \geq |x| - (|x_1|+|x_2|+\dots+|x_n|+|x_{n+1}|)$$

□

b) Es soll die Ungleichung $|x-y| \geq ||x|-|y||$ bewiesen werden.

$$\begin{aligned} |x-y| &\geq ||x|-|y|| & |()|^2 \text{ erlaubt, weil beide Seiten } > 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 &\geq x^2 - 2|x||y| + y^2 & | - x^2 - y^2 \\ -2xy &\geq -2|x||y| & | : (-2) \\ xy &\leq |xy| \end{aligned}$$

Dies ist eine wahre Aussage, da, sobald einer der Faktoren negativ ist, die linke Seite negativ ist, und somit kleiner als der Betrag. Wenn x und y das selbe Vorzeichen haben, dann ist eine Gleichheit gegeben. □

c) Es werden die Fälle $x < 0$ und $x \geq 0$ untersucht.

$x \geq 0$ Die Betragsstriche können weggelassen werden:

$$\left(\frac{x+x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-x}{2}\right)^2 = \left(\frac{2x}{2}\right)^2 + 0^2 = x^2$$

$x < 0$ $|x|$ wird durch $-x$ ersetzt:

$$\left(\frac{x-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-(-x)}{2}\right)^2 = 0^2 + \left(\frac{2x}{2}\right)^2 = x^2$$

□

3 Absoltes II

Es sind die reellen Lösungen der Ungleichungen zu ermitteln.

a) $|x| > |x + 1|$

Es sind zwei Fälle zu betrachten.

Fall 1:

$$\begin{aligned} -x - 1 &> x & | -x \\ -2x - 1 &> 0 & | +1 \\ -2x &> 1 & | : (-2) \\ x &< -0,5 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist hier $(-\infty; -0,5)$.

Fall 2: $x > x + 1$

$$\begin{aligned} x &> x + 1 & | -x \\ -0 &> 1 \end{aligned}$$

Und hier ist die Lösungsmenge leer.

Insgesamt ergibt sich als Lösungsmenge $L = (-\infty; -0,5)$.

b) Es muss $-1 < x < 1$ gelten. Daraus ergeben sich zwei Fälle:

Fall 1:

$$\begin{aligned} x + 1 - (-(x - 1)) &< 1 \\ x + 1 + x - 1 &< 1 \\ 2x &< 1 \\ x &< 0,5 \end{aligned}$$

Fall 2:

$$\begin{aligned} -(x + 1) - (x - 1) &< 1 \\ -x - 1 - x + 1 &< 1 \\ -2x &< 1 \\ x &> -0,5 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die Lösungsmenge als $L = (-0,5; 0,5)$.

c) $|x(1-x)| < 0,05$

Hier sind zwei Fälle zu betrachten.

Fall 1: $x > 0, x < 1$ Hier ist x positiv, darum können die Betragsstriche weggelassen werden.

$$\begin{aligned}x(1-x) &< 0,05 \\ -x^2 + x - 0,05 &< 0 \\ x_{1,2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - 0,05} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{5}}\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Lösungsmenge für diesen Fall als

$$L_1 = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{5}}; 1\right) \cup \left(0; \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{5}}\right)$$

Fall 2: $x \leq 0, x \geq 1$ Da hier das x negativ sein kann, wird $|z| = -z$ geschrieben.

$$\begin{aligned}-x(1-x) &< 0,05 \\ x^2 - x - 0,05 &< 0 \\ x_{1,2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 0,05} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{10}}\end{aligned}$$

Dies entspricht der Lösungsmenge

$$L_2 = \left[1; \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{10}}\right) \cup \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{10}}; 0\right]$$

Insgesamt ist die Lösungsmenge

$$L = L_1 \cup L_2 = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{5}}; \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{10}}\right) \cup \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{10}}; \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{5}}\right)$$

4 Horner

Es wird das Polynom $f(x) = 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ ausgewertet.

| Stelle | 5 | -8 | 3 | -4 | 1 |
|--------|---|-----|----|-----|------------|
| -2 | | -10 | 36 | -78 | 164 |
| | 5 | -18 | 39 | -82 | 165 |
| -1 | | -5 | 13 | -16 | 20 |
| | 5 | -13 | 16 | -20 | 21 |
| 0 | | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 5 | -8 | 3 | -4 | 1 |
| 1 | | 5 | -3 | 0 | -4 |
| | 5 | -3 | 0 | -4 | -3 |
| 2 | | 10 | 4 | 14 | 20 |
| | 5 | 2 | 7 | 10 | 21 |

Die dick geschriebenen Zahlen geben das Ergebnis an der jeweiligen Stelle wieder.