

Mathematik für Informatiker II

(Autor: Hanne Hardering)

1. Gruppe, Körper

- (a) Zeigen Sie, dass die reellen Zahlen $0 \leq x < 1$ zusammen mit der Addition $\bmod 1$ eine Gruppe bilden. Benennen Sie wenigstens zwei echte Teilmengen dieser Menge, die ebenfalls mit der Addition $\bmod 1$ eine Gruppe bilden.

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein eindeutiges $n \in \mathbb{Z}$ mit $x \bmod 1 = x + n$, also $(x + n) \in [0, 1)$. Somit ist $[0, 1)$ abgeschlossen bezüglich der Addition $\bmod 1$.

Lösung:

Die Addition $\bmod 1$ ist assoziativ: Seien $a, b, c \in [0, 1)$.

Dann gilt: $(a + ((b + c) \bmod 1)) \bmod 1 = a + ((b + c) \bmod 1) + n = a + b + c + m + n$ für geeignete $m, n \in \mathbb{Z}$ und

$((a + b) \bmod 1) + c \bmod 1 = ((a + b) \bmod 1) + c + s = a + b + c + t + s$ für geeignete $s, t \in \mathbb{Z}$.

Es gibt genau ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $m + n = s + t + k$. Somit gilt dann:

$(a + ((b + c) \bmod 1)) \bmod 1 = (((a + b) \bmod 1) + c) \bmod 1 - k$

Also ist k die ganzzahlige Differenz zwischen zwei Elementen aus $[0, 1)$. Es muss also $k = 0$ gelten und somit folgt die Assoziativität.

0 ist das neutrale Element:

Für alle $a \in [0, 1)$ gilt: $(a + 0) \bmod 1 = a \bmod 1 = a$.

Es gibt zu jedem $a \in [0, 1)$ ein additives Inverses \bar{a} :

Für $a = 0$ ist $\bar{a} = 0$.

Für $a \in (0, 1)$ ist $\bar{a} = 1 - a \in (0, 1)$: $(a + (1 - a)) \bmod 1 = 1 \bmod 1 = 0$.

Also bildet $[0, 1)$ mit der Addition $\bmod 1$ eine Gruppe und die Teilmengen $\{0\}$ und $\{0, \frac{1}{2}\}$ sind echte Untergruppen.

- (b) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ zusammen mit der üblichen Multiplikation und Addition von reellen Zahlen einen Körper bilden.

Lösung:

Seien $x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Dann gibt es $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ mit $x = a + b\sqrt{2}$ und $y = c + d\sqrt{2}$.

Es gilt: $x + y = (a + b) + (c + d)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $x \cdot y = (ac + 2bd) + (bc + ad)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

Also ist $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ abgeschlossen gegen Addition und Multiplikation.

- i. $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +)$ ist eine kommutative Gruppe:

Assoziativität: Seien x und y wie oben und $z = e + f\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Dann gilt:
 $x + (y + z) = (a + b\sqrt{2}) + ((c + d\sqrt{2}) + (e + f\sqrt{2})) =$
 $((a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2})) + (e + f\sqrt{2}) = (x + y) + z$ aufgrund der Assoziativität der Gruppe $(\mathbb{R}, +)$.

$0 = 0 + 0\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist neutrales Element.

Zu jedem $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ gibt es ein Inverses \bar{x} :

x habe die Darstellung $x = a + b\sqrt{2}$. Dann ist $\bar{x} = (-a) + (-b)\sqrt{2}$ additives Inverses zu x .

Für alle x und y wie oben gilt:

$x + y = (a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (c + d\sqrt{2}) + (a + b\sqrt{2}) = y + x$, also ist die Addition kommutativ.

- ii. $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe.

\cdot ist assoziativ:

Seien x, y und z wie oben. Dann gilt:

$x \cdot (y \cdot z) = (a + b\sqrt{2}) \cdot ((c + d\sqrt{2}) \cdot (e + f\sqrt{2})) = ((a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2})) \cdot (e + f\sqrt{2}) =$
 $(x \cdot y) \cdot z$.

$1 = 1 + 0\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist neutrales Element bzgl. \cdot .

Zu jedem $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \setminus \{0\}$ gibt es ein multiplikatives Inverses x^{-1} :

x habe die Darstellung $x = a + b\sqrt{2}$.

Dann ist $x^{-1} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} + \frac{b}{2b^2 - a^2} \sqrt{2}$ Inverses zu x :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a}{a^2 - 2b^2} + \frac{b}{2b^2 - a^2} \sqrt{2} \right) \cdot (a + b\sqrt{2}) \\ &= \frac{a}{a^2 - 2b^2} \cdot a + 2 \frac{b}{2b^2 - a^2} \cdot b + \left(a \cdot \frac{b}{2b^2 - a^2} + b \cdot \frac{a}{a^2 - 2b^2} \right) \sqrt{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

\cdot ist kommutativ:

Für alle x und y wie oben gilt:

$x \cdot y = (a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = (c + d\sqrt{2}) \cdot (a + b\sqrt{2}) = y \cdot x$.

- iii. Es gilt das Distributivgesetz:

Seien x, y und z wie oben. Dann gilt:

$x \cdot (y + z) = (a + b\sqrt{2}) \cdot ((c + d\sqrt{2}) + (e + f\sqrt{2})) =$
 $= (a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) + (a + b\sqrt{2}) \cdot (e + f\sqrt{2}) = x \cdot y + x \cdot z$

Also ist $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \cdot)$ tatsächlich ein Körper.

2. Algebraische Struktur

Wird korrigiert.

3. Rationale Zahlen

Wird korrigiert.

4. Intervalle

In einem nichtleeren Intervall (a, b) von reellen Zahlen gibt es abzählbar unendlich viele rationale Zahlen:

Lösung:

Da \mathbb{Q} bekanntlich abzählbar unendlich ist, ist auch die Teilmenge $(a, b) \cap \mathbb{Q}$ höchstens abzählbar unendlich. Zu zeigen bleibt also, dass $(a, b) \cap \mathbb{Q}$ nicht endlich ist.

Zwischen zwei reellen Zahlen liegt stets eine rationale Zahl, also gibt es rationale a', b' mit $a < a' < b' < b$. Damit liegt auch die rationale Zahl $a' + \frac{b'-a'}{n}$ für jedes natürliche $n > 0$ im Intervall (a, b) .

In einem nichtleeren Intervall (a, b) von reellen Zahlen gibt es überabzählbar viele irrationale reelle Zahlen:

Lösung:

Widerspruchsannahme: Die Anzahl der irrationalen Zahlen im Intervall (a, b) ist abzählbar.

Aus der Annahme folgt unter Verwendung des ersten Teils der Aufgabe, dass das Intervall (a, b) als Vereinigung zweier abzählbarer Mengen auch abzählbar ist (zähle abwechselnd die Elemente der beiden Mengen ab).

Wir definieren nun die Abbildungen $f : (a, b) \rightarrow (0, 1)$ durch $f(x) = \frac{x-a}{b-a}$ und $g : (0, 1) \rightarrow (a, b)$ durch $g(x) = x(b-a) + a$.

Es gilt $f(g(x)) = \frac{x(b-a)+a-a}{b-a} = x$ und $g(f(x)) = \frac{x-a}{b-a}(b-a) + a = x$. Also ist f bijektiv und somit ist das Intervall (a, b) gleichmächtig zum reellen Intervall $(0, 1)$, welches bekanntlich überabzählbar ist (Cantors Diagonalisierung). Somit ist auch (a, b) überabzählbar. Widerspruch.

5. Supremum (4 Punkte)

Wird korrigiert.