

1 Einheitswurzel

a) Es ist $\zeta_{dn,1}^{dk} = \zeta_{n,1}^k$ zu zeigen.

$$\zeta_{dn,1}^{dk} = (e^{i2\pi \frac{1}{dn}})^{dk} = e^{i2\pi \frac{1}{dn} * dk} = e^{i2k\pi \frac{1}{n}} = (e^{i2\pi \frac{1}{n}})^k = \zeta_{n,1}^k$$

□

b) Es ist $\zeta_{n,1}^{\frac{n}{2}} = -1$ für gerades $n > 0$ zu zeigen.

$$\zeta_{n,1}^{\frac{n}{2}} = (e^{i2\pi \frac{1}{n}})^{\frac{n}{2}} = e^{i2\pi \frac{1}{n} * \frac{n}{2}} = e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

□

c)

d) Es soll $\sum_{j=0}^{n-1} (\zeta_{n,k})^j = 0$ bewiesen werden.

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} (\zeta_{n,k})^j &= \underbrace{(\zeta_{n,k})^0}_{=0} + (\zeta_{n,k})^1 + (\zeta_{n,k})^2 + \dots + (\zeta_{n,k})^{n-2} + (\zeta_{n,k})^{n-1} \\ &= (\zeta_{n,k})^1 + (\zeta_{n,k})^{n-1} + (\zeta_{n,k})^2 + (\zeta_{n,k})^{n-2} + \dots \begin{cases} + (\zeta_{n,k})^{\frac{n}{2}} & \text{gerades } n \\ + (\zeta_{n,k})^{\frac{n}{2}-1} + (\zeta_{n,k})^{\frac{n}{2}+1} & \text{ungerades } n \end{cases} \\ &= e^{i2k\pi \frac{1}{n}} + e^{i2k\pi \frac{1}{n}(n-1)} + e^{i2k\pi \frac{1}{n}2} + e^{i2k\pi \frac{1}{n}(n-2)} \dots \begin{cases} + e^{i2k\pi \frac{1}{n}(\frac{n}{2})} \\ + e^{i2k\pi \frac{1}{n}(\frac{n}{2}-1)} + e^{i2k\pi \frac{1}{n}(\frac{n}{2}+1)} \end{cases} \\ &= \underbrace{\cos(2k\pi \frac{1}{n}) + i \sin(2k\pi \frac{1}{n}) + \cos(2k\pi \frac{1}{n}(n-1)) + i \sin(2k\pi \frac{1}{n}(n-1)) + \dots}_{\text{können per Additionstheorem zusammengefasst werden}} \\ &\dots \begin{cases} + \cos(2k\pi \frac{1}{n} \frac{n}{2}) + i \sin(2k\pi \frac{1}{n} \frac{n}{2}) \\ + \cos(2k\pi \frac{1}{n}(\frac{n}{2}-1)) + i \sin(2k\pi \frac{1}{n}(\frac{n}{2}-1)) + \cos(2k\pi \frac{1}{n}(\frac{n}{2}+1)) + i \sin(2k\pi \frac{1}{n}(\frac{n}{2}+1)) \end{cases} \\ &= 2 \sin \frac{2k\pi \frac{1}{n} + 2k\pi \frac{1}{n}(n-1)}{2} \cos \frac{2k\pi \frac{1}{n} - 2k\pi \frac{1}{n}(n-1)}{2} \\ &+ 2 \cos \frac{2k\pi \frac{1}{n} + 2k\pi \frac{1}{n}(n-1)}{2} \cos \frac{2k\pi \frac{1}{n} - 2k\pi \frac{1}{n}(n-1)}{2} + \dots \\ &= 2 \underbrace{\sin k\pi}_{k \in \mathbb{Z} \Rightarrow =0} \cos k \frac{2-n}{n} \pi + \dots \end{aligned}$$

Hmm, in meinem Kopf ging das irgendwie besser ...

2 Trigonometrisches

Es sollen

$$\sin 4\phi = 8 \cos^3 \phi \sin \phi - 4 \cos \phi \sin \phi$$

$$\cos 4\phi = 8 \cos^4 \phi - 8 \cos^2 \phi + 1$$

mithilfe der trigonometrischen Formeln für $e^{i\phi}$ bewiesen werden. Zuerst wird also $(e^{i\phi})^4 = (\cos \phi + i \sin \phi)^4$ berechnet:

$$\begin{aligned}(e^{i\phi})^4 &= (\cos \phi + i \sin \phi)^4 = \cos^4 \phi + 4 \cos^3 \phi i \sin \phi + 6 \cos^2 \phi i^2 \sin^2 \phi + 4 \cos \phi i^3 \sin^3 \phi + i^4 \sin^4 \phi \\ &= \cos^4 \phi + \sin^4 \phi - 6 \cos^2 \phi \sin^2 \phi + i(4 \cos^3 \phi \sin \phi - 4 \cos \phi \sin^3 \phi)\end{aligned}$$

Zudem ist $(e^{i\phi})^4 = e^{i4\phi} = \cos 4\phi + i \sin 4\phi$ und so können nun also die real- und imaginär Teile verglichen werden, um die aussage zu bestätigen.

$$\begin{aligned}\sin 4\phi &= 4 \cos^3 \phi \sin \phi - 4 \cos \phi \sin^3 \phi \\ &= 4 \cos^3 \phi \sin \phi - 4 \cos \phi \sin \phi (1 - \cos^2 \phi) \\ &= 4 \cos^3 \phi \sin \phi - 4 \cos \phi \sin \phi + 4 \cos^3 \phi \sin \phi \\ &= 8 \cos^3 \phi \sin \phi - 4 \cos \phi \sin \phi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 4\phi &= \cos^4 \phi + \sin^4 \phi - 6 \cos^2 \phi \sin^2 \phi \\ &= \cos^4 \phi - 6 \cos^2 \phi (1 - \sin^2 \phi) + \sin^4 \phi \\ &= \cos^4 \phi - 6 \cos^2 \phi + 6 \cos^4 \phi + \sin^4 \phi \\ &= 7 \cos^4 \phi - 6 \cos^2 \phi + (1 - \cos^2 \phi)^2 \\ &= 7 \cos^4 \phi - 6 \cos^2 \phi + 1 - 2 \cos^2 \phi + \cos^4 \phi \\ &= 8 \cos^4 \phi - 8 \cos^2 \phi + 1\end{aligned}$$

□

3 Komplexe Zahlenebene

Die Skizzen sind auf dem separaten Blatt zu finden.

Hier nun die kurzen Erläuterungen ...

1. $5e^{it}$ mit $0 \leq t \leq \pi$ beschreibt einen Halbkreis mit Radius 5. Durch das Addieren von $3 - i$ wird der Halbkreis nur entsprechend verschoben. Es gehören also alle Punkte des Halbkreises zu z .
2. Da sich der Winkel und der Betrag, also der Abstand zum Nullpunkt, immer gleichmäßig ändert, wird eine Art Spirale geformt. Alle Punkte auf der Spirale liegen in der Menge.

3. Der Punkt $-1-i$ liegt in der Ebene. Von diesem Punkt aus sollen nun alle Zahlen den Abstand ≤ 3 haben. Dies formt wieder einen Kreis, der verschoben wird zu dem Mittelpunkt $-1-i$. Diesmal gehören aber alle Punkte, die innerhalb und auf dem Kreisbogen liegen, zur Menge.
4. Damit das Argument 0 ist, muss der Imaginärteil von $z^2 = x^2 + i \underbrace{2xy}_{Im} - y^2$ gleich 0 sein. Die 0 wird erreicht, indem entweder $x = 0$ oder $y = 0$ und gleichzeitig $x + 1 = 0$ (wegen dem +1) der Realteil ist. Es sind also alle z in der Menge enthalten, welche auf der x-Achsen bzw. auf der Gerade bei $x = -1$ liegen.

4 Umrechnung

Es sollen Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Argument berechnet werden.

$$\left(\frac{2+i}{1-(1+i)^2} \right)^9$$

Es wird in die Exponentialform umgewandelt, da es sich hier besser teilen und potenzieren lässt.

Der Zähler ist einfach ...

$$z = 2 + i$$

$$|z| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\arg z = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 26,57^\circ$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{5}e^{i26,57^\circ}$$

Der Nenner ein wenig komplizierter ...

$$\begin{aligned} n &= 1 + \overline{(1+i)^2} = 1 + \overline{(1+i)(1+i)} = 1 + \overline{(1+i)} * \overline{(1+i)} \\ &= 1 + (1-i)(1-i) = 1 + 1 - i2 - 1 = 1 - i2 \end{aligned}$$

$$|n| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$\arg n = -\arccos \frac{1}{\sqrt{5}} \approx -63,43^\circ$$

$$\Rightarrow n = \sqrt{5}e^{i-63,43^\circ}$$

Jetzt ist das Dividieren und das Potenzieren leicht

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{5}e^{i26,57^\circ}}{\sqrt{5}e^{i-63,43^\circ}} \right)^9 &= \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} e^{i(26,57^\circ + 63,43^\circ)} \right)^9 = (e^{i(90^\circ)})^9 = e^{i(90^\circ)*9} = e^{i(720^\circ)} \\ &= e^{i(0^\circ)} \end{aligned}$$

Und jetzt in algebraischer Darstellung:

$$\cos(0^\circ) + i \sin(0^\circ) = \underbrace{1}_{Re} + i \underbrace{0}_{Im}$$

Und nun zum zweiten Teil ...

$$\left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{99}$$

Auch hier wird erstmal in die Exponentialform umgeformt.

$$\begin{aligned} z &= 1 + i \\ |z| &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \arg z &= \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ \\ \Rightarrow z &= \sqrt{2} e^{i45^\circ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= 1 - i \\ |n| &= \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \\ \arg n &= \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ \\ \Rightarrow n &= \sqrt{2} e^{i45^\circ} \end{aligned}$$

Nun kann einfach dividiert und potenziert werden ...

$$\left(\frac{\sqrt{2} e^{i45^\circ}}{\sqrt{2} e^{i45^\circ}} \right)^{99} = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{i(45^\circ - 45^\circ)} \right)^{99} = e^{i0 \cdot 99} = e^{i0}$$

In algebraischer Darstellung ergibt sich

$$\cos 0 + i \sin 0 = \underbrace{1}_{Re} + i \underbrace{0}_{Im}$$