

1. Ungleichungen

(a) siehe Tutorium

(b) Behauptung:

$$\forall n > 0 : \quad \frac{1}{2} \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

Beweis: mit vollständiger Induktion

Induktionsanfang: $n = 1$:

$$3 < 4 \implies \frac{1}{4} < \frac{1}{3} \implies \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{4}} < \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 1 + 1}} \quad (1)$$

denn die Wurzelfunktion ist streng monoton wachsend (*); d.h. $0 < x < y \Leftrightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}$.

Induktionsschritt: Angenommen, $\frac{1}{2} \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Zu zeigen :

$$\frac{1}{2} \frac{3}{4} \cdots \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} < \frac{1}{\sqrt{2(n+1)+1}}$$

$$\frac{1}{2} \frac{3}{4} \cdots \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} = \frac{1}{2} \frac{3}{4} \cdots \frac{2n+1}{2n+2} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \quad (3)$$

$$\stackrel{I.V.}{<} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2} \quad (4)$$

$$3 < 4 \implies (2n+1)(2n+3) = 4n^2 + 8n + 3 \leq 4n^2 + 8n + 4 = (2n+2)^2 \quad (5)$$

$$\implies \sqrt{(2n+1)(2n+3)} \stackrel{*}{\leq} \sqrt{(2n+2)^2} \quad (6)$$

$$\implies \sqrt{2n+1} \cdot \sqrt{2n+3} \leq 2n+2 \quad (7)$$

$$\implies \frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \quad (8)$$

Also folgt

$$\frac{1}{2} \frac{3}{4} \cdots \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} < \frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+3}} = \frac{1}{\sqrt{2(n+1)+1}} \quad (9)$$

(c) siehe Tutorium

2. Absolutes I

(a) Zu zeigen ist

$$|x + x_1 + \cdots + x_n| \stackrel{!}{\geq} |x| - (|x_1| + \cdots + |x_n|)$$

Das ist äquivalent zu $|x| \stackrel{!}{\leq} |x + x_1 + \dots + x_n| + |x_1| + \dots + |x_n|$
 Wir betrachten die letztere Ungleichung, da sie sich übersichtlicher auflösen lässt.
 Beweis: mit vollständiger Induktion
 Induktionsanfang mit $n = 1$:

$$|x| = |(x + x_1) + (-x_1)| \stackrel{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} |x + x_1| + |-x_1| = |x + x_1| + |x_1| \quad (10)$$

Induktionsschritt: Es gelte $|x| \leq |x + x_1 + \dots + x_n| + |x_1| + \dots + |x_n|$.
 Zu zeigen: $|x| \leq |x + x_1 + \dots + x_{n+1}| + |x_1| + \dots + |x_{n+1}|$
 Betrachte dazu $(x_n + x_{n+1})$ als einen einzelnen Summanden y_n , um die Induktionsvoraussetzung anwenden zu können.

$$|x| \stackrel{IV}{\leq} |x + x_1 + \dots + y_n| + |x_1| + \dots + |y_n| \quad (11)$$

$$= |x + x_1 + \dots + (x_n + x_{n+1})| + |x_1| + \dots + |(x_n + x_{n+1})| \quad (12)$$

$$\stackrel{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} |x + x_1 + \dots + x_n + x_{n+1}| + |x_1| + \dots + |x_n| + |x_{n+1}| \quad (13)$$

$$= |x + x_1 + \dots + x_{n+1}| + |x_1| + \dots + |x_{n+1}| \quad (14)$$

- (b) siehe Tutorium
 (c) mit $|x|^2 = x^2$ folgt

$$\left(\frac{x + |x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x - |x|}{2}\right)^2 = \frac{x^2 + 2x|x| + |x|^2}{4} + \frac{x^2 - 2x|x| + |x|^2}{4} = \frac{2x^2 + 2x^2}{4} = x^2 \quad (15)$$

3. Absolutes II

- (a) **erster Lösungsweg** mit der Eigenschaft der streng monoton wachsenden Quadratsfunktion auf \mathbb{R} ; d.h. für $a, b \geq 0$ gilt: $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$:

$$|x| > |x + 1| \stackrel{*}{\Leftrightarrow} |x|^2 > |x + 1|^2 \Leftrightarrow x^2 > (x + 1)^2 \Leftrightarrow x^2 > x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$$

zweiter Lösungsweg:

Um die Lösungsmenge zu ermitteln, die eine Ungleichung mit Beträgen erfüllt, müssen wir uns die Ungleichung auf den Teilmengen von \mathbb{R} anschauen, in denen uns klar ist, ob ein Inhalt eines Betrages positiv oder negativ ist.

Für $x \geq 0$ ist $|x|$ positiv, also ist $|x| = x$.

Für $x \leq 0$ ist $|x|$ negativ, also ist $|x| = -(x) = -x$.

Für $x \geq -1$ ist $|x + 1|$ positiv, also ist $|x + 1| = x + 1$.

Für $x \leq -1$ ist $|x + 1|$ negativ, also ist $|x + 1| = -(x + 1) = -x - 1$.

Also sind die Teilmengen von \mathbb{R} hier $A_1 := (-\infty, -1)$, $A_2 := [-1, 0]$ und $A_3 := (0, \infty)$.
 (Ob -1 und 0 jeweils zu der Menge A_1 oder A_3 dazugenommen werden anstatt zu A_2 , ist unbedeutend.)

$$|x| > |x + 1| \Leftrightarrow 0 > |x + 1| - |x| \quad (16)$$

Wir betrachten die rechte Ungleichung, da sie sich übersichtlicher auflösen lässt.

Wir suchen jetzt die Teilmenge L_1 der Lösungsmenge L , die innerhalb A_1 liegt. In A_1 gilt folgendes:

$$0 > |x + 1| - |x| = -(x + 1) - (-x) = -1 \quad (17)$$

Also erfüllen alle $x \in A_1$ die Ungleichung. Also $L_1 = A_1$.

Wir suchen die Teilmenge $L_2 \subseteq L$, die innerhalb A_2 liegt:

$$0 > |x + 1| - |x| = x + 1 - (-x) = 2x + 1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2} \quad (18)$$

Also erfüllen genau die $x \in A_2$ die Ungleichung, die auch $x < -\frac{1}{2}$ erfüllen. Also $L_2 = [-1, -\frac{1}{2})$.

Wir suchen die Teilmenge $L_3 \subseteq L$ innerhalb A_3 :

$$0 > |x+1| - |x| = x+1-x=1 \quad (19)$$

Also erfüllen keine $x \in A_3$ die Ungleichung. Also $L_3 = \emptyset$.

Also ist die Lösungsmenge $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (-\infty, -1) \cup [-1, -\frac{1}{2}) = (-\infty, -\frac{1}{2})$.

(b) siehe Tutorium

(c) Wir suchen die Lösungsmenge L von $|x(1-x)| < 0.05$.

$$|x(1-x)| < 0.05 \iff -0.05 < x(1-x) < 0.05 \quad (20)$$

Wir suchen die Lösungsmenge L_1 von $x(1-x) < 0.05$ und die Lösungsmenge L_2 von $0.05 < x(1-x)$. Dann ist $L = L_1 \cap L_2$.

Bestimmung von L_1 :

$$x(1-x) < 0.05 \iff f(x) := x^2 - x + 0.05 > 0$$

Nullstellen von f sind: $x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{2}{10}}$.

Da der Graph von f eine nach oben offene Parabel ist, ist die Funktion genau zwischen den Nullstellen negativ. Wir suchen den positiven Teil. Also $L_1 = (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$

Bestimmung von L_2 :

$$-0.05 < x(1-x) \iff g(x) := x^2 - x - 0.05 < 0$$

Nullstellen von g sind: $x_{3,4} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{10}}$.

Da der Graph von f eine nach oben offene Parabel ist, ist die Funktion genau zwischen den Nullstellen negativ. Also $L_2 = (x_3, x_4)$

Da offensichtlich $x_3 < x_1 < x_2 < x_4$ gilt, ist $L = L_1 \cap L_2 = (x_3, x_1) \cup (x_2, x_4) = (\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{10}}, \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{5}}) \cup (\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{5}}, \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{10}})$

4. Horner

siehe Tutorium