

## 1 Polynome I

Das Polynom  $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$  soll im Punkt 2 entwickelt werden. Dies geht mit Hilfe der Taylor-Formel.

$$T_{f(x)} = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (x - x_0)^k$$

Man bilde also erstmal die Ableitungen ...

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 15x^2 + 10x + 1 & f'(2) &= -7 \\ f''(x) &= 12x^2 - 30x + 10 & f''(2) &= -2 \\ f'''(x) &= 24x - 30 & f'''(2) &= 18 \\ f^{(4)}(x) &= 24 & f^{(4)}(2) &= 24 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich als Entwicklung im Punkt  $x_0 = 2$

$$\begin{aligned} T_{f(x)} &= \frac{f(2)}{0!} (x-2)^0 + \frac{f'(2)}{1!} (x-2)^1 + \frac{f''(2)}{2!} (x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!} (x-2)^3 + \frac{f^{(4)}(2)}{4!} (x-2)^4 \\ &= 0 - 7(x-2) - (x-2)^2 + 3(x-2)^3 + (x-2)^4 \end{aligned}$$

Das entwickelte Polynom sieht dann also wie folgt aus

$$-7(x-2) - (x-2)^2 + 3(x-2)^3 + (x-2)^4$$

## 2 Taylor I

Es sollen jeweils die ersten fünf Glieder der Taylor-Entwicklung in  $x_0 = 0$  angegeben werden. Das heißt, man braucht jeweils die ersten vier Ableitungen.

a) Die Funktion lautet  $f(x) = (1 + \sin x)x$ . Man stelle also wieder zunächst die Ableitungen auf ...

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x * x + 1 + \sin x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\sin x * x + \cos x + \cos x = -\sin x * x + 2 \cos x & f''(0) &= 2 \\ f'''(x) &= -\cos x * x - \sin x - \sin x - \sin x = -\cos x * x - 3 \sin x & f'''(0) &= 0 \\ f^{(4)}(x) &= \sin x * x - \cos x - \cos x - \cos x - \cos x \\ &= \sin x * x - 4 \cos x & f^{(4)}(0) &= -4 \end{aligned}$$

Nun können wir die ersten fünf Glieder entwickeln ...

$$\begin{aligned} T_{f(x)} &= \frac{f(0)}{0!} x^0 + \frac{f'(0)}{1!} x^1 + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} x^4 \\ &= 0 + \frac{1}{1} x^1 + \frac{2}{2} x^2 + \frac{0}{6} x^3 + \frac{-4}{24} x^4 \end{aligned}$$

Die Entwicklung der ersten fünf Glieder ist

$$x + x^2 - \frac{1}{6}x^4$$

b) Die zu entwickelnde Funktion lautet  $g(x) = \ln \cosh x$ . Und schon wieder erst die Ableitungen ...

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{\cosh x} * \sinh x = \tanh x & g'(0) &= 0 \\ g''(x) &= -\frac{1}{\cosh^2 x} & g''(0) &= -1 \\ g'''(x) &= \frac{2 \cosh x * \sinh x}{\cosh^4 x} = \frac{2 \sinh x}{\cosh^3 x} & g'''(0) &= 0 \\ g''''(x) &= \frac{2 \cosh x * \cosh^3 x - 3 \cosh^3 x * \sinh x * 2 \sinh x}{\cosh^6 x} \\ &= \frac{2 \cosh^2 x - 6 \sinh^2 x}{\cosh^4 x} & g''''(0) &= 2 \end{aligned}$$

Und wieder schön in die Formel eingesetzt:

$$\begin{aligned} T_{g(x)} &= \frac{g(0)}{0!}x^0 + \frac{g'(0)}{1!}x^1 + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \frac{g'''(0)}{3!}x^3 + \frac{g''''(0)}{4!}x^4 \\ &= \frac{0}{1}x^0 + \frac{0}{1}x + \frac{-1}{2}x^2 + \frac{0}{6}x^3 + \frac{2}{24}x^4 \end{aligned}$$

Die Entwicklung der ersten fünf Glieder ergibt also

$$-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4$$

### 3 Taylor II

Zu der Funktion  $f(x) = \ln(1 - x + x^2)$  sollen die Taylorpolynome 1., 2. und 3. Grades im Punkt  $x_0 = 0$  bestimmt werden.

$$f'(x) = \frac{1}{1 - x + x^2} * (-1 + 2x) = \frac{-1 + 2x}{1 - x + x^2} \quad f'(0) = -1$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2(1 - x + x^2) - (-1 + 2x)(-1 + 2x)}{(1 - x + x^2)^2} \\ &= \frac{2(1 - x + x^2) - (-1 + 2x)^2}{(1 - x + x^2)^2} \\ &= \frac{2}{1 - x + x^2} - \frac{(-1 + 2x)^2}{(1 - x + x^2)^2} \quad f''(0) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \frac{2(-1 + 2x)}{(1 - x + x^2)^2} - \frac{4((-1 + 2x)(1 - x + x^2)^2) - 2(1 - x + x^2)(-1 + 2x)^3}{(1 - x + x^2)^4} \\ &= \frac{2(-1 + 2x)}{(1 - x + x^2)^2} - \frac{4((-1 + 2x)(1 - x + x^2)) - 2(-1 + 2x)^3}{(1 - x + x^2)^3} \quad f'''(0) = 4 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich das Polynom ersten Grades als

$$T_1 = \frac{f(0)}{0!}x^0 + \frac{f'(0)}{1!}x = \frac{0}{1} * 1 + \frac{-1}{1}x = -x$$

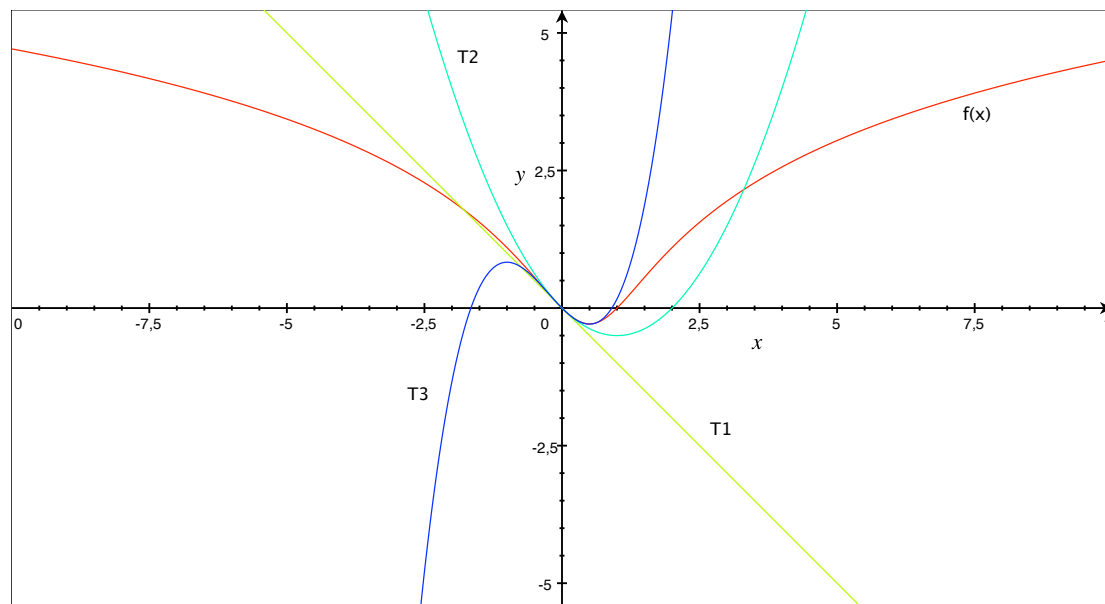
Das Polynom zweiten Grades hat einfach noch ein Glied mehr:

$$T_2 = \frac{f(0)}{0!}x^0 + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = -x + \frac{1}{2}x^2$$

Und das von Grad drei dann noch eins mehr:

$$T_3 = \frac{f(0)}{0!}x^0 + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = -x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3$$

Die Graphen sehen wie folgt dann aus ...



#### 4 Polynome II

Wie wir gesehen haben, kann eine  $n + 1$  mal differenzierbare Funktion mit der Taylor-Formel in ein Polynom von Grad  $n + 1$  umgewandelt werden. Das Polynom sieht dann wie folgt aus:

$$T_{f(x)} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (x - x_0)^k$$

Da aber  $f^{(n+1)}(x) = 0$  für alle  $x$  gilt, ist der letzte Summand 0. Damit kann das Polynom also maximal den Grad  $n$  haben.

#### 5 Umkehr- und Winkelfunktionen

#### 6 Bestimmte, unbestimmte & uneigentliche Integrale

a)

b)

c)

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos(3t - 5) dt &= \int_{-5}^{3\pi-5} \cos x \frac{dx}{3} \mid \text{Substitution } x = 3t - 5 \\ &= \frac{1}{3} \int_{-5}^{3\pi-5} \cos x dx = \frac{1}{3} \sin x \Big|_{-5}^{3\pi-5} \\ &= \frac{1}{3} (\sin(3\pi - 5) - \sin(-5)) \approx -0,639\end{aligned}$$

d)