

Mathematik für Informatiker II
(Hanne Hardering)

Abgabe am Mittwoch, den 04. Juli 2007 bis 13⁰⁰

1. **L'Hospital** (5 Punkte)

(a) Gesucht ist $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{xe^{x-1}}$. Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 x = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0} xe^{x-1} = 0$$

In diesem Fall lässt sich also der Satz von L'Hospital anwenden.

$$(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x$$

$$(xe^{x-1})' = xe^{x-1} + e^{x-1}$$

Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2 \sin x \cos x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (xe^{x-1} + e^{x-1}) = e^{-1}$$

Es folgt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{xe^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{xe^{x-1} + e^{x-1}} = 0$$

(b) Gesucht ist $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln^2 x}$. Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln^2 x = \infty$$

In diesem Fall lässt sich also der Satz von L'Hospital anwenden.

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\ln^2 x)' = 2 \frac{\ln x}{x}$$

Betrachte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2 \frac{\ln x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{4 \ln x}$$

Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 4 \ln x = \infty$$

Wiederum lässt sich also der Satz von L'Hospital anwenden.

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(4 \ln x)' = \frac{4}{x}$$

Also gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln^2 x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{4 \ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{4}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{8} = \infty$$

(c) Gesucht ist $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - 1 + x^2}{x^4}$. Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{-x^2} - 1 + x^2) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^4 = 0$$

In diesem Fall lässt sich also der Satz von L'Hospital anwenden.

$$(e^{-x^2} - 1 + x^2)' = 2x(1 - e^{-x^2})$$

$$(x^4)' = 4x^3$$

Betrachte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(1 - e^{-x^2})}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - e^{-x^2})}{2x^2}$$

Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{-x^2}) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2x^2 = 0$$

Wiederum lässt sich der Satz von L'Hospital anwenden.

$$(1 - e^{-x^2})' = 2xe^{-x^2}$$

$$(2x^2)' = 4x$$

Also gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - 1 + x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^{-x^2}}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}(e^{-x^2}) = \frac{1}{2}$$

2. **Mittelwertsatz** (3 Punkte) Sei $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ ein reelles Polynom vom Grad n mit n verschiedenen Nullstellen $x_1 < \dots < x_n$.

Beh.: Hat $p(x)$ ein lokales Extremum an der Stelle $c \in \mathbb{R}$, so gilt $x_1 < c < x_n$.

Bew.: Das Intervall $[x_1, x_n]$ wird durch die Nullstellen des Polynoms in $n-1$ Teilintervalle der Form $[x_i, x_{i+1}]$ mit $i = 1, \dots, n-1$ zerlegt. Auf jedem dieser Teilintervalle ist die Einschränkung von $p(x)$ stetig. Somit lässt sich der Mittelwertsatz anwenden:

Es gibt für jedes i ein $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ mit $f'(\xi_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = 0$.

Im Intervall (x_1, x_n) gibt es also insgesamt $n-1$ verschiedene Nullstellen von $p'(x)$.

Nach den bekannten Ableitungsregeln gilt $p'(x) = \sum_{k=1}^n a_k k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$ mit $b_k = (k+1)a_{k+1}$. Die Ableitung $p'(x)$ ist also ein Polynom vom Grad $n-1$. Sie hat daher höchstens $n-1$ verschiedene Nullstellen, welche demnach alle zwischen x_1 und x_n liegen.

Hat $p(x)$ ein lokales Extremum an der Stelle $c \in \mathbb{R}$, so gilt für die Ableitung an dieser Stelle $p'(c) = 0$. Es folgt $c \in (x_1, x_n)$. \square

3. **Newton-Verfahren** (4 Punkte) π ist eine Nullstelle der Funktion $f(x) = \tan \frac{x}{4} - \cot \frac{x}{4}$. Wir verwenden das Newton-Verfahren, um diese zu approximieren. Berechne dazu zunächst $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{4 \cos^2 \frac{x}{4}} + \frac{1}{4 \sin^2 \frac{x}{4}} = \frac{1}{4 \cos^2 \frac{x}{4} \sin^2 \frac{x}{4}}$$

Für jedes x etwa aus dem Intervall $[3.0, 3.5]$ ist $f'(x) > 0$, $f(3) < 0$, $f(3.5) > 0$. Wähle als Startwert $x_0 = 3$. Wende nun das Newton-Verfahren an:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - 4 \cos \frac{x_0}{4} \sin \frac{x_0}{4} (\sin^2 \frac{x_0}{4} - \cos^2 \frac{x_0}{4}) =$$

$$= 3 - 4 \cos \frac{3}{4} \sin \frac{3}{4} (\sin^2 \frac{3}{4} - \cos^2 \frac{3}{4}) \approx 3,141120$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 - 4 \cos \frac{x_1}{4} \sin \frac{x_1}{4} (\sin^2 \frac{x_1}{4} - \cos^2 \frac{x_1}{4}) \approx 3,141592$$

Nach zwei Iterationsschritten ist π auf 6 Stellen genau bestimmt.

4. **Min-Max** (4 Punkte) Wird korrigiert.
5. **Kegel** (4 Punkte) Wird korrigiert.