

1 Interpolation

Für den Grad $n = 2$ kann per Newton-Interpolation ein konkretes Polynom angegeben werden:

$$\begin{array}{cc} x & y \\ 2 & -2 \\ & y_{01} = -1 \\ -1 & 1 & y_{012} = 1 \\ & y_{12} = 0 \\ 3 & 1 \end{array}$$

Dabei werden die y wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} y_{01} &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{1 - (-2)}{-1 - 2} = -1 \\ y_{12} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 1}{3 - (-1)} = 0 \\ y_{012} &= \frac{y_{12} - y_{01}}{x_2 - x_0} = \frac{0 - (-1)}{3 - 2} = 1 \end{aligned}$$

Das Polynom ergibt sich dann also als

$$p_2(x) = -2 + (-1)(x - 2) + 1(x - 2)(x + 1) = x^2 - 2x - 2$$

Um jetzt ein Polynom von beliebigem Grad $n > 2$ zu konstruieren geht man wie folgt vor: Es ist bekannt, dass wenn man zu ein Polynom von Grad $n > 2$ ein Polynom von Grad 2 addiert, dass der Grad immer noch n beträgt. Das Polynom, welches wir addieren werden, wird nun gerade $p_2(x)$ sein. Das andere Polynom $q_n(x)$ muss genau an den zu interpolierenden Stellen Nullstellen besitzen, damit bei der Addition nur ein Summand, nämlich $p_2(x)$ übrig bleibt und somit unsere gewünschten Stellen getroffen werden.

$$p_n(x) = q_n(x) + p_2(x)$$

$$q_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Da bei $x = 2, -1, 3$ Nullstellen, können sie als Linearfaktoren abgespalten werden

$$= (x - 2)(x + 1)(x - 3) * (c_n x^{n-3} + c_{n-1} x^{n-4} + \dots + c_4 x + c_3)$$

Demnach ergibt sich

$$p_n(x) = (x - 2)(x + 1)(x - 3) * (c_n x^{n-3} + c_{n-1} x^{n-4} + \dots + c_4 x + c_3) + (x^2 - 2x - 2)$$

2 Polynomdivision

Es ist der ganzrationale und gebrochen rationale Anteil zu bestimmen.

$$\begin{array}{r} (x^2 + (1-i)x + (2+i)) : ((1+i)x + (1+2i)) = (0,5 - i0,5)x + (-1 - i0,5) \\ - (x^2 + (1,5 + i0,5)x) \\ \hline (-0,5 - 1,5i)x + (2+i) \\ - ((-0,5 - 1,5i)x - i2,5) \\ \hline (2 + i3,5) \end{array}$$

Der ganzrationale Anteil ergibt sich als

$$(0,5 - i0,5)x + (-1 - i0,5)$$

und der gebrochen rationale als

$$\frac{2 + i3,5}{(0,5 - i0,5)x + (-1 - i0,5)}$$

3 Gemischtes Komplexes

a) Es ist die Zahl $z = -1 + i$ trigonometrisch und in Exponentialform darzustellen.

Exponentialform

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{-1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \arg z &= \arccos \frac{-1}{\sqrt{2}} = 135^\circ \\ \Rightarrow z &= \sqrt{2}e^{i135^\circ} = \sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi} \end{aligned}$$

trigonometrische Darstellung

$$z = \sqrt{2} * (\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi)$$

b) Es sind die komplexen Zahlen zu ermitteln, welche die Gleichung $z\bar{z} + 3(z - \bar{z}) = 4 - 3i$ erfüllen, wobei $z = x + iy$.

$$\begin{aligned} z\bar{z} + 3(z - \bar{z}) &= (x + iy)(x - iy) + 3((x + iy) - (x - iy)) \\ &= (x^2 - ixy + ixy + y^2) + 3(i2y) \\ &= x^2 + y^2 + i6y \end{aligned}$$

Da dies gleich $4 - 3i$ sein muss, muss also $x^2 + y^2 = 4$ und $i6y = -3i$ sein.
Somit ergibt sich $y = -\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}x^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 &= 4 \\x^2 &= \frac{15}{4} \\x_{1,2} &= \pm \sqrt{\frac{15}{4}} = \pm \frac{\sqrt{15}}{2}\end{aligned}$$

Als Lösungen ergeben sich dann

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{\sqrt{15}}{2} - i\frac{1}{2} \\z_2 &= -\frac{\sqrt{15}}{2} - i\frac{1}{2}\end{aligned}$$

c) Um die Abgeschlossenheit der Multiplikation auf $\{a^2 + b^2 | a, b \in \mathbb{Z}\}$ zu beweisen, betrachten wir hier $|z|^2 * |w|^2$, $z, w \in \mathbb{C}$ mit $z = a + ib, w = c + id$. Es ist nun zu zeigen, dass $|z|^2 * |w|^2 = |x|^2$ gilt, wobei $x \in \mathbb{C}$ liegt.

$$\begin{aligned}|z|^2 * |w|^2 &= \sqrt{a^2 + b^2}^2 * \sqrt{c^2 + d^2}^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \\&= (a + ib)(a - ib) * (c + id)(c - id) = z\bar{z} * w\bar{w} = zw * \overline{zw} \\&= |zw|^2\end{aligned}$$

zw ist nach Definition eine komplexe Zahl $zw = (a+ib)(c+id) = \underbrace{(ac - bd)}_{=u} + i \underbrace{(bc + ad)}_{=v}$.

Hiervon ist der Betrag $\sqrt{u^2 + v^2}$ und $|zw|^2 = u^2 + v^2$. Demnach gilt also

$$(a^2 + b^2) * (c^2 + d^2) = u^2 + v^2.$$

Die Abgeschlossenheit wäre damit bewiesen.

d) Es ist die Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen zu beweisen.

$$\begin{aligned}|z + w| &\leq |z| + |w| \\\Leftrightarrow |z + w|^2 &\leq (|z| + |w|)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z + w}) = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} \\&= |z|^2 + |w|^2 + z\bar{w} + w\bar{z} \\(|z| + |w|)^2 &= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2\end{aligned}$$

Es muss also auch folgendes gelten:

$$|z|^2 + |w|^2 + z\bar{w} + w\bar{z} \leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2$$

$$z\bar{w} + w\bar{z} \leq 2|zw|$$

Sei $z = a + ib$ und $w = c + id$.

$$\begin{aligned} z\bar{w} + w\bar{z} &= (a + ib)(c - id) + (c + id)(a - ib) \\ &= (ac + bd) + i(-ad + bc) + (ca + db) + i(-cb + da) \\ &= (2ac + 2bd) + i(0) = 2(ac + bd) \\ 2|zw| &= 2 * |zw| = 2 * \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} \end{aligned}$$

e) Sei $z = e^{i\phi}$ eine komplexe Zahl mit dem Betrag 1. Um zu zeigen, dass es sich um eine kommutative Gruppe handelt, müssen folgende Eigenschaften bewiesen werden:

neutrales Element Es muss $z * z_n = z$ gelten.

$$\begin{aligned} z * z_n &= z \\ e^{i\phi} * z_n &= e^{i\phi} \\ z_n &= \frac{e^{i\phi}}{e^{i\phi}} = e^{i(\phi-\phi)} = e^{i0} \end{aligned}$$

inverses Element Es muss $z * z^{-1} = z_n$ gelten.

$$\begin{aligned} z * z^{-1} &= z_n \\ e^{i\phi} * z^{-1} &= e^{i0} \\ z^{-1} &= \frac{e^{i0}}{e^{i\phi}} = e^{i(0-\phi)} = e^{-i\phi} \end{aligned}$$

Assoziativität Es muss $z_1 * (z_2 * z_3) = (z_1 * z_2) * z_3$ gelten.

$$\begin{aligned} &z_1 * (z_2 * z_3) \\ &= e^{i\phi_1} * (e^{i\phi_2} * e^{i\phi_3}) = e^{i\phi_1} * e^{i(\phi_2+\phi_3)} \\ &= e^{i(\phi_2+\phi_3)+\phi_1} = e^{i(\phi_1+\phi_2)+\phi_3} = e^{i(\phi_1+\phi_2)+\phi_3} \\ &= e^{i(\phi_1+\phi_2)} * e^{i\phi_3} = (e^{i\phi_1} * e^{i\phi_2}) * e^{i\phi_3} \end{aligned}$$

Kommutativität Es muss $z_1 * z_2 = z_2 * z_1$ gelten.

$$\begin{aligned} &z_1 * z_2 \\ &= e^{i\phi_1} * (e^{i\phi_2} = e^{i(\phi_1+\phi_2)}) \\ &= e^{i(\phi_2+\phi_1)} = e^{i\phi_2} * (e^{i\phi_1} \end{aligned}$$

4 Rechnen im Komplexen

Es werden die komplexen Lösungen berechnet.

Es soll $4x^4 + 4x^3 - 7x^2 + x - 2 = 0$ sein. Wir raten die Nullstelle $x_0 = 1$ und spalten sie per Polynomdivision ab.

$$\begin{array}{r}
 (4x^4 + 4x^3 - 7x^2 + x - 2) \div (x - 1) = 4x^3 + 8x^2 + x + 2 \\
 \underline{-4x^4 + 4x^3} \\
 8x^3 - 7x^2 \\
 \underline{-8x^3 + 8x^2} \\
 x^2 + x \\
 \underline{-x^2 + x} \\
 2x - 2 \\
 \underline{-2x + 2} \\
 0
 \end{array}$$

Bei unserem Restpolynom raten wir die Nullstelle $x_1 = -2$ und spalten auch hier sie wieder ab.

$$\begin{array}{r}
 (4x^3 + 8x^2 + x + 2) \div (x + 2) = 4x^2 + 1 \\
 \underline{-4x^3 - 8x^2} \\
 x + 2 \\
 \underline{-x - 2} \\
 0
 \end{array}$$

Wir erhalten eine quadratische Gleichung, die man leicht lösen kann:

$$\begin{aligned}
 4x^2 + 1 &= 0 \\
 4x^2 &= -1 \\
 x^2 &= -\frac{1}{4} \\
 x_{2,3} &= \pm i \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge entspricht dann

$$L = \{-2, -i\frac{1}{2}, i\frac{1}{2}, 1\}$$

$$\begin{aligned}
 x^6 + 1 &= \sqrt{3}i \\
 x^6 &= \underbrace{-1 + i\sqrt{3}}_{=z}
 \end{aligned}$$

Man rechnet nun die rechte Seite (z) um in Exponentialform:

$$|z| = \sqrt{-1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$$
$$\arg z = \arccos \frac{-1}{2} = 120^\circ$$

Die Lösungen ergeben sich dann als:

$$x_1 = 2e^{i120^\circ}$$
$$x_2 = 2e^{i240^\circ} = 2e^{i-120^\circ}$$
$$x_3 = 2e^{i360^\circ} = 2e^{i0^\circ}$$