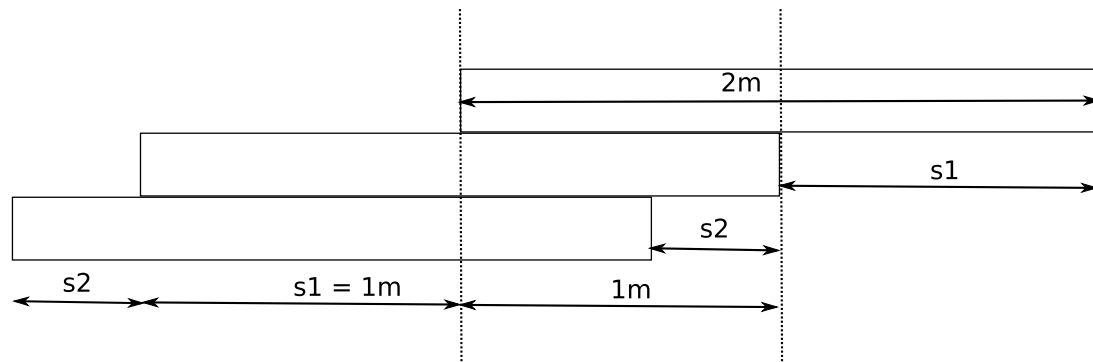


## 1 Harmonischer Holzhaufen

Bei 2 Brettern ist das Problem trivial. Dort ist  $s_1 = 1$ . Um weiterzurechnen, mache man zuerst ein Bildchen:



Wie man sieht, erreicht man vom untersten Brett den Schwerpunkt vom mittleren Brett durch  $t_2 + 1$  und den Schwerpunkt des obersten Brettes durch  $t_2 + t_1 + 1$ . Der neue Schwerpunkt ergibt sich dann als die Summe dieser beiden Strecken geteilt durch 2  $\frac{1}{2}(t_2 + 1 + t_2 + t_1 + 1)$ . Damit die Bretter nicht runterkippen, müssen sie noch gerade so mit dem Schwerpunkt auf der rechten Ecke des untersten Brettes liegt, also bei einer Strecke von 2. Also  $\frac{1}{2}(t_2 + 1 + t_2 + t_1 + 1) = 2$ . Man löse nach  $t_2$  auf:  $\frac{1}{2}(t_2 + 1 + t_2 + t_1 + 1) = 2 \Leftrightarrow 2t_2 + t_1 + 2 = 4 \Leftrightarrow t_2 = \frac{2-t_1}{2} \Leftrightarrow t_2 = \frac{1}{2}$ .

Wenn man jetzt dieses Verfahren zur Schwerpunktbestimmung verallgemeinert, dann muss man jeweils die Abstände zu dem Schwerpunkt jeden einzelnen Brettes addieren und durch die Gesamtzahl an Bretter teilen. Angenommen, wir haben  $n$  Bretter:

$$\frac{1}{n} ((t_n + 1) + (t_n + t_{n-1} + 1) + \dots + (t_n + \dots + t_2 + 1) + (t_n + \dots + t_2 + t_1 + 1))$$

Um das möglichste bei der Länge raus zubekommen, müssen wir die oberen  $n - 1$  Bretter wieder mit dem Schwerpunkt auf den Abstand 2, also die rechte Ecke von Brett  $n$ , verschieben:

$$\frac{1}{n} ((t_n + 1) + (t_n + t_{n-1} + 1) + \dots + (t_n + \dots + t_2 + 1) + (t_n + \dots + t_2 + t_1 + 1)) - (n-1) = 2$$

Man formt ein bisschen um:

$$\begin{aligned}
 2 &= \frac{1}{n} \left( \underbrace{(t_n + 1)}_{n \text{ mal}} + \underbrace{(t_n + t_{n-1} + 1)}_{n-1 \text{ mal}} + \dots + \underbrace{(t_n + \dots + t_2 + t_1 + 1)}_{2 \text{ mal}} \right) - (n-1) \\
 &= \frac{1}{n} (n * t_n + (n-1) * t_{n-1} + (n-2) * t_{n-2} + \dots + 2 * t_2 + t_1 + n * 1) - (n-1) \\
 &= t_n + \frac{n-1}{n} t_{n-1} + \frac{n-2}{n} t_{n-2} + \dots + \frac{2}{n} t_2 + \frac{1}{n} t_1 + 1 \\
 t_n &= 2 - \left( \frac{n-1}{n} t_{n-1} + \frac{n-2}{n} t_{n-2} + \dots + \frac{2}{n} t_2 + \frac{1}{n} t_1 + 1 \right) \\
 n * t_n &= 2n - (n-1)t_{n-1} - (n-2)t_{n-2} - \dots - 2t_2 - t_1 - n \\
 n * t_n &= n - (n-1)t_{n-1} - (n-2)t_{n-2} - \dots - 2t_2 - t_1 \\
 0 &= n - n * t_n - (n-1)t_{n-1} - (n-2)t_{n-2} - \dots - 2t_2 - t_1
 \end{aligned}$$

Es ist nun offensichtlich, dass alle Subtrahenten = 1 sind, da wir davon  $n$  Stück haben. Somit gilt auch  $t_n * n = 1$ . Bzw.

$$t_n = \frac{1}{n}$$

Um nun die Länge von dem "Holzhaufen" aus  $n+1$  Brettern zu berechnen, benötigen wir nur alle  $t_n$  aufzusummieren. Da wir ja aber nur von rechter Kante zu rechter Kante die Länge haben wollen, und nicht die Gesamtlänge, muss noch 2 subtrahiert werden. Nun endlich bekommen wir unser  $s_n$ :

$$s_n = \sum_{k=1}^n t_n - 2 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} - 2$$

Dies ist die harmonische Reihe, die bei  $n \rightarrow \infty$  divergiert. Also unendlich groß wird. Interessanter sind die Werte für  $s_{50} \approx 2,499$  und  $s_{100} \approx 3,187$ .

## 2 O-Notation I

a) Es soll  $f(n) + g(n) = \Theta(\max(f(n), g(n)))$  bewiesen werden. Wenn die Annahme richtig ist, dann muss gelten

$$\begin{aligned}
 \exists c_1, c_2 > 0 \forall n > n_0 : c_1 * \max(f(n), g(n)) &< f(n) + g(n) < c_2 * \max(f(n), g(n)) \\
 \Leftrightarrow c_1 < \frac{f(n) + g(n)}{\max(f(n), g(n))} &< c_2
 \end{aligned}$$

Es sind nun zwei Fälle möglich:

$$\begin{aligned}
 1. f(n) \geq g(n) : c_1 &< \frac{f(n) + g(n)}{f(n)} < c_2 \\
 c_1 &< \frac{f(n)(1 + \frac{g(n)}{f(n)})}{f(n)} < c_2 \\
 c_1 &< 1 + \underbrace{\frac{g(n)}{f(n)}}_{\leq 1} < c_2 \quad \text{wähle } c_1 = 1, c_2 = 3 \\
 2. f(n) < g(n) : c_1 &< \frac{f(n) + g(n)}{g(n)} < c_2 \\
 c_1 &< \frac{g(n)(1 + \frac{f(n)}{g(n)})}{g(n)} < c_2 \\
 c_1 &< 1 + \underbrace{\frac{f(n)}{g(n)}}_{< 1} < c_2 \quad \text{wähle } c_1 = 1, c_2 = 3
 \end{aligned}$$

Da wir wie gezeigt  $c_1$  und  $c_2$  finden können, ist die Annahme richtig. □

**b)**  $f(n) = \Theta(f(\frac{n}{2}))$ . Auch hier muss wieder

$$\exists c_1, c_2 \forall n > n_0 : c_1 * f(\frac{n}{2}) < f(n) < c_2 * f(\frac{n}{2})$$

gelten. Man formt um

$$\begin{aligned}
 c_1 * f(\frac{n}{2}) &< f(n) < c_2 * f(\frac{n}{2}) \quad | : f(\frac{n}{2}) \\
 c_1 &< \frac{f(n)}{f(\frac{n}{2})} < c_2
 \end{aligned}$$

Auch hier unterscheiden wir zwei Fälle:

$$\begin{aligned}
 1. f(n) > f(\frac{n}{2}) : c_1 &< \underbrace{\frac{f(n)}{f(\frac{n}{2})}}_{> 1} < c_2, \text{ wähle } c_1 = 1, c_2 = (\frac{f(n)}{f(\frac{n}{2})})^2 \\
 1. f(n) \leq f(\frac{n}{2}) : c_1 &< \underbrace{\frac{f(n)}{f(\frac{n}{2})}}_{\leq 1} < c_2, \text{ wähle } c_1 = (\frac{f(n)}{f(\frac{n}{2})})^2, c_2 = 1
 \end{aligned}$$

Da wir zu jeder Möglichkeit  $c_1$  und  $c_2$  finden, gilt die Aussage. □

c)

d) Es soll  $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow 2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$  überprüft werden.

$$\begin{aligned} f(n) &= O(g(n)) \\ \Leftrightarrow \exists c > 0 \forall n > n_0 : f(n) < c * g(n) & \quad | 2^{\cdot} \\ 2^{f(n)} &< 2^{c * g(n)} \\ 2^{f(n)} &< (2^{g(n)})^c \\ \neq 2^{f(n)} &< c' * 2^{g(n)} \Leftrightarrow 2^{f(n)} = O(2^{g(n)}) \end{aligned}$$

Die Aussage ist also falsch.

Hier auch noch ein anschauliches Gegenbeispiel. Sei  $f(x) = x$  und  $g(x) = x \log_2 x$ . Es gilt hier  $f(x) = O(g(x))$ . Was ist mit  $2^{f(x)} = O(2^{g(x)})$ ? Hier müsste  $2^x < c * 2^{x \log_2 x} = c * x^2$  gelten. Dies ist aber falsch, da exponentielles Wachstum wesentlich größer ist als quadratisches.

### 3 O-Notation II

Eigentlich müsste bei dem Induktionsschritt  $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = O((n+1)^2)$  rauskommen. Die Argumentation ist dann nur richtig, wenn  $O(n^2) = O((n+1)^2)$  ist.

### 4 O-Notation III

Eine Anmerkung, bevor es losgeht: Jede Funktion ist zu sich selber obere und untere Schranke, da immer eine entsprechende Konstante  $c$  gefunden wird. Die Diagonalen in den Tabellen enthalten also immer  $x$ .

Als erstes wird überprüft, für welche Funktionen  $f(n) = O(g(n))$  gilt. Vieles ergibt sich aus der Tabelle, die in der Vorlesung vorgestellt wurde, die übrigen werden explizit berechnet.

f \ g	a	b	c	d	e	f	g
a	x	-	x	x	x	-	x
b	x	x	x	x	x	x	x
c	-	-	x	x	-	-	x
d	-	-	-	x	-	-	-
e	-	-	x	x	x	-	-
f	x	x	x	x	x	x	x
g	-	-	-	x	-	-	x

Die Rechnungen zur Tabelle ...

$a(n) = O(b(n))$  ? Da  $\log_a n = \Theta(\log_b n)$  gilt, kann auch  $\sqrt[n]{n} = O(\log_2 n)$  geschrieben werden, und dies gilt bekanntlich nicht, vielmehr gilt  $\sqrt[n]{n} = \Omega(\log_2 n)$  und somit auch  $\sqrt[n]{n} = \Omega(\log_{10} n)$ .

$a(n) = O(d(n))$  ? Es muss  $\sqrt[n]{n} < c * 6n^2 - 36 - 444$  gelten. Dies gilt immer, da  $d(n)$  eine höhere Potenz hat. Es ist also  $a(n) = O(d(n))$ .

$a(n) = O(f(n))$  ? Gilt bekanntlich nicht. Vielmehr ist  $a(n) = \Omega(f(n))$ .

$a(n) = O(g(n))$  ? Wenn schon  $n \log_5 n - 1 + \sqrt[n]{n} - 1$  obere Schranke ist, dann auch  $g(n)$ . Man prüft also ob die folgende Aussage gilt:  $\sqrt[n]{n} < c * (n \log_5 n + \sqrt[n]{n} - 2)$  Wähle  $c = 1$ , dann erhält man  $\sqrt[n]{n} < n \log_5 n + \sqrt[n]{n} - 2 \Leftrightarrow 0 < n \log_5 n - 2$ , was offensichtlich gilt für alle  $n > n_0 = 5$ .

$b(n) = O(a(n))$  ? Siehe  $a(n) = O(b(n))$ . Gilt also.

$b(n) = O(c(n))$  ? Da  $\log_a n = \Theta(\log_b n)$  gilt, kann auch  $\log_1 0(n) = O(n \log_{10} n)$  geschrieben werden. Dies kann auf  $\log_2(n) = O(n \log_2 n)$  übertragen werden, was bekanntlich gilt.

$b(n) = O(d(n))$  ? Jedes Polynom in  $n$  wächst schneller als jedes Polynom in  $\log n$ , also  $(\log n)^k = o(a^i)$ . Insbesondere gilt dann auch  $\log n = o(a^i)$ . Somit ist also  $d(n)$  eine obere Schranke.

$b(n) = O(e(n))$  ? Der Logarithmus wächst viel langsamer als linear, damit ist  $(\frac{b(n)}{e(n)})$  eine Nullfolge und somit beschränkt. Die Behauptung gilt also.

$b(n) = O(f(n))$  ? Da  $\log_a n = \Theta(\log_b n)$  gilt, kann auch  $\log_1 0(n) = O(\log_{10} n)$  geschrieben werden, was ja gilt.

$b(n) = O(g(n))$  ? Wieder der Trick von oben, man überprüft  $\log_{10} n < c * (n \log_5 n + \sqrt[n]{n} - 2)$ . Die Folge  $(\frac{\log_{10} n}{(n \log_5 n + \sqrt[n]{n} - 2)})$  muss also beschränkt sein, und das ist sie auch, da es sich um eine Nullfolge handelt.  $\sqrt[n]{n}$  wächst nämlich schneller als der Logarithmus, und somit auch die Summe im Nenner als der Zähler.

$c(n) = O(b(n))$  ? Wie immer kann der Logarithmus umgewandelt werden zu  $n \log_2 n < c * \log_2 n$ . Dies gilt laut der Tabelle nicht!

$c(n) = O(d(n))$  ? Wenn dies gilt, dann muss auch  $(\frac{\log_2 n}{6n-36-444/n})$  beschränkt sein. Dies ist sogar eine Nullfolge, da ein lineares Wachstum schneller ist als logarithmisches.

$c(n) = O(e(n))$  ? Es müsste  $(\frac{n \log_2 n}{1000n}) = (\frac{\log_2 n}{1000})$  beschränkt sein. Dies gilt aber nicht, da  $\log_2 n$  über alle Grenzen wächst und auch der Faktor daran nix ändert.

$c(n) = O(f(n))$  ? Gilt laut Tabelle nicht.

$c(n) = O(g(n))$  ? Trick von oben mit dem Abschätzen nach unten. Es muss die Folge  $(\frac{n \log_2 n}{n \log_5 n + \sqrt[n]{n} - 2})$  beschränkt sein. Dies ist eine Nullfolge und somit beschränkt, da die Wurzelfunktion schneller wächst als jeder Logarithmus.

$d(n) = O(a(n))$  ?  $(\frac{n(6n-36-444/n)}{\sqrt[n]{n}}) = \sqrt[n]{n}(6n - 36 - 444/n)$  Diese Folge ist nicht beschränkt, daher gilt die Behauptung nicht.

$d(n) = O(b(n))$  ? Siehe Begründung von  $b(n) = O(d(n))$ . Bloß andersrum, gilt also nicht.

$d(n) = O(c(n))$  ?  $(\frac{n(6n-36-444/n)}{n \log_2 n}) = (\frac{6n-36-444/n}{\log_2 n})$  ist nicht beschränkt, da der Logarithmus langsamer wächst als linear. Somit gilt dies nicht.

$d(n) = O(e(n))$  ?  $(\frac{n(6n-36-444/n)}{1000n}) = (\frac{6n-36-444/n}{1000})$  gilt auch nicht, da die Folge über alle Grenzen wächst.

$d(n) = O(f(n))$  ? Siehe Begründung  $d(n) = O(b(n))$ , gilt auch nicht.

$d(n) = O(g(n))$  ? Wir schätzen wieder nach unten ab.  $(\frac{6n^2-36n-444}{n \log_5 n + \sqrt{n}-2})$  müsste beschränkt sein. Ist es aber nicht, da der Nenner durch die Wurzel langsamer wächst als  $x^2$  im Zähler.

$e(n) = O(a(n))$  ? Gilt nicht, da  $(\frac{1000n}{\sqrt{n}}) = (1000\sqrt{n})$  nicht beschränkt ist.

$e(n) = O(b(n))$  ? Da lineares Wachstum größer ist als logarithmisches, gilt die Aussage nicht.

$e(n) = O(d(n))$  ?  $(\frac{1000n}{n(6n-36-444/n)}) = (\frac{1000}{6n-36-444/n})$  ist eine Nullfolge und somit beschränkt.

$e(n) = O(f(n))$  ? Siehe  $e(n) = O(b(n))$ .

$e(n) = O(g(n))$  ? Wieder wird nach unten abgeschätzt.  $(\frac{1000n}{n \log_5 n + \sqrt{n}-2}) = (\frac{1000n}{n(\log_5 n + \sqrt{n}/n-2/n)}) = (\frac{1000}{\log_5 n + \sqrt{n}/n-2/n})$  ist nicht beschränkt, also gilt die Aussage nicht.

$f(n) = O(b(n))$  ? Siehe  $b(n) = O(f(n))$ .

$f(n) = O(d(n))$  ? Siehe  $b(n) = O(d(n))$ .

$f(n) = O(g(n))$  ? Siehe  $b(n) = O(g(n))$ .

$g(n) = O(a(n))$  ? Jetzt kommt immer der Trick andersrum. Wenn für  $n \log_5 n + \sqrt{n} + 2$  obere Schranken gefunden werden, dann auch für  $g(n)$ .  $(\frac{n \log_5 n + \sqrt{n} + 2}{\sqrt{n}}) = (\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n} \log_5 n / \sqrt{n} + 1 + 2/\sqrt{n})}{\sqrt{n}}) = (\sqrt{n} \log_5 n / \sqrt{n} + 1 + 2/\sqrt{n})$  ist nicht beschränkt, also gilt die Aussage auch nicht.

$g(n) = O(b(n))$  ?  $(\frac{n \log_5 n + \sqrt{n} + 2}{\log_{10} n})$  Durch die Wurzel wächst der Zähler schneller als der Nenner, somit ist die Folge nicht beschränkt.

$g(n) = O(c(n))$  ? Auch hier sorgt die Wurzel im Zähler für ein schnelleres Wachstum und damit für Nichtbeschränktheit.

$g(n) = O(d(n))$  ? Ein Polynom wächst schneller als logarithmisch. Deshalb erhält man eine Nullfolge und somit gilt die Aussage.

$g(n) = O(e(n))$  ?  $(\frac{n(\log_5 n + \sqrt{n}/n + 2/n)}{1000n}) = (\frac{\log_5 n + \sqrt{n}/n + 2/n}{1000})$ . Dies ist nicht beschränkt und somit gilt die Aussage nicht.

$g(n) = O(f(n))$  ? Die Wurzel wächst schneller als der Logarithmus im Nenner, darum erreicht man auch keine Beschränktheit, da die Folge über alle Grenzen wächst.

In der Tabelle sind nun alle  $f(n) = \Omega(g(n))$  aufgeführt. Dies entspricht der gespiegelten Tabelle von  $f(n) = O(g(n))$ . Wenn nämlich  $g(n)$  obere Schranke für  $f(n)$  ist, dann ist andersrum  $f(n)$  untere Schranke für  $g(n)$ .

f \ g	a	b	c	d	e	f	g
a	x	x	-	-	-	x	-
b	-	x	-	-	-	x	-
c	x	x	x	-	x	x	-
d	x	x	x	x	x	x	x
e	x	x	-	-	x	x	-
f	-	x	-	-	-	x	-
g	x	x	x	-	-	x	x

Und jetzt die  $f(x) = \Theta(g(x))$  Tabelle. Hier gehören alle Paare zu, die in den beiden oberen Tabellen vorhanden sind, da jeweils beide Eigenschaften erfüllt sein müssen.

f \ g	a	b	c	d	e	f	g
a	x	-	-	-	-	-	-
b	-	x	-	-	-	x	-
c	-	-	x	-	-	-	-
d	-	-	-	x	-	-	-
e	-	-	-	-	x	-	-
f	-	x	-	-	-	x	-
g	-	-	-	-	-	-	x

## 5 Grenzen

Es wird  $(1 - \frac{3}{2x})^{4x}$  auf Konvergenz untersucht.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{3}{2x})^{4x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{\frac{3}{2}}{x})^{4x} \\
 &= \underbrace{(\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{-\frac{3}{2}}{x})^x)^4}_{=e} \\
 &= (e^{-\frac{3}{2}})^4 \\
 &= e^{-\frac{3}{2} \cdot 4} \\
 &= e^{-\frac{12}{2}} = e^{-6} \\
 &\approx 0,002479
 \end{aligned}$$

Und nun zur zweiten Aufgabe ...

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x+2} &= \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{x+2} & x < -2 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x+2} & x > -2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} \underbrace{\frac{1}{x+2}}_{\substack{\text{neg} \\ 1}} & x < -2 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \underbrace{\frac{1}{x+2}}_{\substack{\text{pos} \\ 1}} & x > -2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\infty & x < -2 \\ +\infty & x > -2 \end{cases}\end{aligned}$$

Diese Funktion ist also divergent.