

1. Aufgabenblatt vom Freitag, den 20. April 2007 zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker II

(Frank Hoffmann)

Abgabe am Mittwoch, den 02. Mai 2007 bis 13⁰⁰

1. Gruppe, Körper (2+4 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass die reellen Zahlen $0 \leq x < 1$ zusammen mit der Addition $\bmod 1$ eine Gruppe bilden. Benennen Sie wenigstens zwei echte Teilmengen dieser Menge, die ebenfalls mit der Addition $\bmod 1$ eine Gruppe bilden.
- (b) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ zusammen mit der üblichen Multiplikation und Addition von reellen Zahlen einen Körper bilden.

2. Algebraische Struktur (4 Punkte)

Wir betrachten die Menge der rationalen Zahlen mit zwei Operationen \square, \diamond , definiert mittels:

$$a \square b = a + b + 1 \quad a \diamond b = ab + a + b$$

Untersuchen Sie diese Operationen auf Assoziativität, Kommutativität, die Existenz neutraler Elemente, inverser Elemente und gegenseitige Distributivität!

3. Rationale Zahlen (2 Punkte)

Eine rationale Zahl wurde in der Vorlesung definiert als Äquivalenzklasse von Brüchen. Zeigen Sie, dass Addition und Multiplikation von rationalen Zahlen wohldefiniert sind (also unabhängig von der Wahl der Repräsentanten).

4. Intervalle (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass es in jedem nichtleeren Intervall (a, b) von reellen Zahlen abzählbar unendlich viele rationale und überabzählbar viele irrationale reelle Zahlen gibt.

5. Supremum (4 Punkte)

Seien X und Y nichtleere und nach oben beschränkte Teilmengen der reellen Zahlen. Zeigen Sie:

- (a) $X \cup Y$ und $X + Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$ sind nichtleer und nach oben beschränkt.
- (b) $\sup(X \cup Y) = \max\{\sup X, \sup Y\}$
- (c) $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$
- (d) Falls $\sup X \notin X$, so hat X unendlich viele Elemente.