

Mathematik für Informatiker II
(Hanne Hardering)

Abgabe am Mittwoch, den 16. Mai 2007 bis 13⁰⁰

1. Polynomentwicklung (4 Punkte)

- (a) Wir wissen aus der Vorlesung, dass jedes Polynom $p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ vom Grad $n \geq 1$ sich eindeutig darstellen lässt als

$$p_n(x) = p_n(x_0) + (x - x_0)(c_n x^{n-1} + \dots + c_1)$$

Dabei ist $(c_n x^{n-1} + \dots + c_1)$ ein Polynom vom Grad $n - 1$, welches wir nun mit $p_{n-1}(x)$ bezeichnen. Es gilt nun

$$p_n(x) = p_n(x_0) + (x - x_0)p_{n-1}(x)$$

Dieses Vorgehen können wir nun iterieren bis wir ein Polynom $p_0(x) = \text{const.} = p_0(x_0)$ erhalten. Dadurch erhalten wir folgende eindeutige Darstellung von $p_n(x)$:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= p_n(x_0) + (x - x_0)(p_{n-1}(x_0) + (x - x_0)(\dots(p_1(x_0) + (x - x_0)p_0(x_0)))) \\ &= p_n(x_0) + p_{n-1}(x_0)(x - x_0) + p_{n-2}(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + p_0(x_0)(x - x_0)^n \\ &= \sum_{i=0}^n b_i (x - x_0)^i \end{aligned}$$

mit $b_i = p_{n-i}(x_0)$ für $0 \leq i \leq n$

- (b) Sei $p_2(x) = x^2 - 2x - 1$.

- i. Sei $x_0 = 1$. Wir gehen nun analog zum Aufgabenteil (a) vor und wenden das Horner Schema an:

$$\begin{array}{rrr} 1 & -2 & -1 \\ & 1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & -2 \end{array}$$

Dies wiederholen wir für $p_1(x) = x - 1$:

$$\begin{array}{rr} 1 & -1 \\ & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}$$

So erhalten wir die Darstellung

$$p(x) = 1 \cdot (x - x_0)^2 + 0 \cdot (x - x_0) + (-2) = (x - 1)^2 - 2$$

- ii. Sei $x_0 = -1$:

$$\begin{array}{rrr} 1 & -2 & -1 \\ & -1 & 3 \\ \hline 1 & -3 & 2 \end{array}$$

Dies wiederholen wir für $p_1(x) = x - 3$:

$$\begin{array}{r} 1 \quad -3 \\ -1 \\ \hline 1 \quad -4 \end{array}$$

So erhalten wir die Darstellung

$$p(x) = 1 \cdot (x - x_0)^2 + (-4) \cdot (x - x_0) + 2 = (x + 1)^2 - 4(x + 1) + 2$$

2. Newton und Lagrange (6 Punkte)

- (a) Wird korrigiert.
 (b) Bei der Lagrange-Interpolation berechnet man das Interpolationspolynom wie folgt:

$$p(x) = \sum_{k=0}^4 y_k \cdot L_k(x)$$

Es ist $y_k = 0$ für alle k außer 2. Es reicht also das Lagrange-Polynom $L_2(x)$ zu berechnen:

$$L_2(x) = \prod_{i=0; i \neq 2}^4 \frac{x - x_i}{x_0 - x_i} = \frac{x+2}{0+2} \cdot \frac{x+1}{0+1} \cdot \frac{x-1}{0-1} \cdot \frac{x-2}{0-2} = \frac{1}{4}(x^4 - 5x^2 + 4)$$

Es gilt nun:

$$p(x) = y_2 \cdot L_2(x) = (-1) \frac{1}{4}(x^4 - 5x^2 + 4) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{4}x^2 - 1$$

3. Nullstellen (4 Punkte)

Wird korrigiert.

4. Polynomdivision (6 Punkte)

- (a) Wird korrigiert.
 (b) Die Polynomdivision sieht aus wie folgt:

$$\begin{array}{r} (2x^7 + 5x^6 - 14x^5 + 20x^4 - x^3 - 6x^2 + 6x + 4) : (x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 1) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + 2 \\ -(2x^7 + 8x^6 - 4x^5 + 4x^4 + 2x^3) \\ \hline 3x^6 - 10x^5 + 16x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 6x + 4 \\ -(3x^6 - 12x^5 + 6x^4 - 6x^3 - 3x^2) \\ \hline 2x^5 + 10x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 6x + 4 \\ -(2x^5 + 8x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2x) \\ \hline 2x^4 + 7x^3 - 7x^2 - 4x + 4 \\ -(2x^4 + 8x^3 - 4x^2 + 4x + 2) \\ \hline -x^3 - 3x^2 - 8x + 2 \end{array}$$

Der ganzrationale Anteil von $\frac{p(x)}{q(x)}$ ist also $2x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ und der echt gebrochen rationale Anteil ist $\frac{-x^3 - 3x^2 - 8x + 2}{x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 1}$.