

Mathematik für Informatiker II
(Frank Hoffmann)

Abgabe bis Mittwoch, den 13. Juni 2007, 13⁰⁰

1. **Harmonischer Holzhaufen** (5 Punkte)

n gleichgroße, übereinandergestapelte Bretter der Länge 2m sollen nach der rechten Seite so weit wie möglich verschoben werden, ohne dass der Stapel umkippt. Sei s_n der Abstand des rechten Randes des obersten (ersten) Brettes zum rechten Rand des n -ten Brettes, das ganz unten liegt. Also zum Beispiel $s_2=1\text{m}$. Berechnen Sie s_{50} , s_{100} und den Limes der s_n für $n \rightarrow \infty$.

Hinweis: Sie können natürlich auch die Werte in einem Baumarkt Ihrer Wahl experimentell bestimmen ;-)

2. **O-Notation I** (4 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen. Dabei sind $f(n)$ und $g(n)$ beliebige positive Funktionen mit natürlichen Zahlen als Argumente.

- (a) $f(n) + g(n) = \Theta(\max(f(n), g(n)))$
- (b) $f(n) = \Theta(f(n/2))$
- (c) $f(n) + o(f(n)) = \Theta(f(n))$
- (d) $f(n) = O(g(n))$ impliziert $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$

3. **O-Notation II** (2 Punkte)

Ist die folgende Argumentation korrekt?

Wir beweisen $\sum_{k=1}^n k^2 = O(n^2)$ durch Induktion.

Induktionsverankerung Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=1}^n k^2 = 1 = O(n^2)$.

Induktionsannahme $\sum_{k=1}^n k^2 = O(n^2)$.

Induktionsschritt $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (\sum_{k=1}^n k^2) + (n+1)^2 = O(n^2) + O(n^2) = O(n^2)$.

4. **O-Notation III** (4 Punkte)

Für welche Paare $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ der folgendermaßen definierten Funktionen gilt $f(n) = O(g(n))$, für welche gilt $f(n) = \Omega(g(n))$ und für welche gilt $f(n) = \Theta(g(n))$?

- (a) $n \mapsto \sqrt{n}$
- (b) $n \mapsto \log_{10} n$
- (c) $n \mapsto n \log_2 n$
- (d) $n \mapsto 6n^2 - 36n - 444$
- (e) $n \mapsto 1000n$
- (f) $n \mapsto \log_2 n$
- (g) $n \mapsto \lfloor n \log_5 n \rfloor + \lfloor \sqrt{n} \rfloor$

5. **Grenzen** (4 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte oder zeigen Sie, dass diese nicht existieren.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{2x}\right)^{4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x+2}$$