

Mathematik für Informatiker II  
(Frank Hoffmann)

Abgabe bis Mittwoch, den 06. Juni 2007, 13<sup>00</sup>

1. **Überlagertes** (6 Punkte) Gegeben seien zwei gleichfrequente harmonische Schwingungen der Form

$$u_k(t) = c_k \cos(\omega t + \phi_k), \quad k = 1, 2$$

Gesucht ist deren Überlagerung  $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$  in der Form  $u(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ , mit Amplitude  $A$  und Phase  $\phi$ . Zur Lösung werden die beiden Schwingungen als Realteile der entsprechenden komplexen Schwingungen interpretiert:

$$u_k(t) = \operatorname{Re}(c_k e^{i(\omega t + \phi_k)})$$

Danach wird im Komplexen die Summe der komplexen Schwingungen gebildet und davon der Realteil ist die gesuchte Schwingung.

Berechnen Sie die Überlagerung von  $20 \sin(\pi t + \pi/10)$  und  $15 \cos(\pi t + \pi/6)$ . Rechnen Sie in der Kosinusdarstellung! Stellen Sie die 3 Kurven in geeigneter Form grafisch dar. Hinweis: Sie können fürs Rechnen und Darstellen der Kurven zum Bsp. das Programm MAPLE an einem Institutsrechner benutzen, sollten aber die einzelnen Schritte auch hinreichend dokumentieren.

2. **Viele Häufungspunkte** (3 Punkte) Wie Sie wissen, gibt es für eine Folge höchstens einen Grenzwert. Ein Häufungspunkt einer Folge  $(a_n)$  von reellen Zahlen ist ein  $a \in \mathbb{R}$ , so dass in jeder  $\epsilon$ -Umgebung von  $a$  unendlich viele Folgenglieder liegen.

Jede positive ganze Zahl  $n$  lässt sich eindeutig schreiben als Produkt  $2^r(2s+1)$  mit natürlichen Zahlen  $r = r(n)$  und  $s = s(n)$ , die von  $n$  abhängen. Wir definieren eine Folge  $(a_n)_{n>0}$  durch  $a_n = \frac{r(n)}{s(n)+1}$ .

Zeigen Sie, dass jede reelle Zahl  $a \geq 0$  Häufungspunkt dieser Folge ist.

3. **Ganzzahlige Folgen** (3 Punkte) Beweisen Sie, dass eine ganzzahlige Folge konvergent genau dann ist, wenn sie ab einem gewissen Folgenglied konstant ist.

4. **Grenzwertiges** (8 Punkte)

(a) Untersuchen Sie auf Konvergenz:  $\sqrt{5}, \sqrt{5\sqrt{5}}, \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}, \dots$

(b) Untersuchen Sie auf Konvergenz:  $n \rightarrow \infty$  von  $-\frac{n}{2} + \frac{1}{n+2} \sum_{i=1}^n i$

(c) Untersuchen Sie auf Konvergenz:  $n \rightarrow \infty$  von  $a_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}$

(d) Untersuchen Sie auf Konvergenz:  $n \rightarrow \infty$  von  $a_0 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} \quad n > 0$