

1. **Überlagertes**

siehe Tutorium

2. **Viele Häufungspunkte**

Ein Häufungspunkt einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von reellen Zahlen ist ein $a \in \mathbb{R}$, so dass in jeder ϵ -Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder liegen.

Jede positive ganze Zahl n lässt sich eindeutig schreiben als Produkt $2^r(2s+1)$ mit natürlichen Zahlen $r = r(n)$ und $s = s(n)$, die von n abhängen. Wir definieren eine konkrete Folge $(a_n)_{n>0}$ durch $a_n = \frac{r(n)}{s(n)+1}$.

Aufgabe: Zeigen Sie, dass jede reelle Zahl $a \geq 0$ Häufungspunkt dieser Folge ist.

Beweis:

Wir zeigen zunächst, dass jede nichtnegative rationale Zahl q als Folgenglied auftritt. So eine Zahl $q > 0$ definiert zwei eindeutige positive, natürliche, teilerfremde Zahlen $u(q), v(q)$, für die gilt $q = \frac{u(q)}{v(q)}$. Falls $q = 0$, so setzen wir $u(0) = 0$ und $v(0) = 1$.

Wir definieren weiterhin $w(q) := v(q) - 1$.

Betrachten wir $n(q) := 2^{u(q)}(2 \cdot w(q) + 1)$. Es folgt, dass $n(q)$ immer eine positive ganze Zahl für jedes $q \in \mathbb{Q}_0^+$ ist. Wegen der Eindeutigkeit der Zahlen $r = r(n)$ und $s = s(n)$, die in der Aufgabenstellung genannt wird, gilt $r(n(q)) = u(q)$ und $s(n(q)) = w(q)$. Jedes $q \in \mathbb{Q}_0^+$ definiert also ein $n(q)$, so dass gilt

$$a_{n(q)} = \frac{r(n(q))}{s(n(q)) + 1} = \frac{u(q)}{w(q) + 1} = \frac{u(q)}{v(q)} = q$$

Bezeichne $U_\epsilon(a)$ die ϵ -Umgebung von einem $a \in \mathbb{R}_0^+$. Dann existieren unendlich viele positive rationale Zahlen $q \in U_\epsilon(a)$; siehe Vorlesung. Also existieren auch unendlich viele Folgenglieder $a_n := a_{n(q)} = q \in U_\epsilon(a)$. Also ist a Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n>0}$.

3. **Ganzzahlige Folgen**

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \in \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Behauptung: (a_n) konvergent $\Leftrightarrow (a_n)$ ab einem gewissen Folgenglied konstant.

Beweis:

(a) \Rightarrow : Sei $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Eine konvergente Folge erfüllt das Cauchy-Kriterium, also speziell für jedes $\epsilon < 1$ gibt es ein $a_{n(\epsilon)}$, so dass

$$\forall m, n > n(\epsilon) : |a_m - a_n| < \epsilon$$

Da nach Voraussetzung alle Folgenglieder ganze Zahlen sind, folgt $a_n = a_m = a$ für $m, n > n(\epsilon)$.

(b) \Leftarrow : Die Folge sei ab einem gewissen Glied a_m konstant und gleich einer ganzen Zahl a .

Dann ist die Konvergenzbedingung trivialerweise erfüllt und a ist der Grenzwert:

Denn zu zeigen ist dafür: $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 : |a_n - a| < \epsilon$.

Wir wählen $n_0 = m$ und die Bedingung ist erfüllt.

4. Grenzwertiges

Sei $\lim := \lim_{n \rightarrow \infty}$.

- (a) Die zu betrachtende Folge ist $\sqrt{5}, \sqrt{5\sqrt{5}}, \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}, \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}}, \dots$

Das bedeutet, sie ist gegeben durch: $a_1 = \sqrt{5}$ und $a_{n+1} = \sqrt{5 \cdot a_n}$, bzw. $a_n = 5^{(\sum_{i=1}^n 2^{-i})}$.

Damit ist die Folge monoton wachsend, denn $\forall n \geq 1 : (a_{n+1}/a_n) = 5^{2^{-(n+1)}} > 1$, und sie ist von oben beschränkt durch $5^{(\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i})} = 5$.

Damit ist sie konvergent und für den Grenzwert a gilt die Rekursionsvorschrift $a = \sqrt{5 \cdot a}$. Somit folgt $a = 5$.

- (b) siehe Tutorium

- (c)

$$a_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}} \quad (1)$$

$$= \frac{(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}) \cdot (\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n - \sqrt{n}})}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n - \sqrt{n}}} \quad (2)$$

$$= \frac{n + \sqrt{n} - (n - \sqrt{n})}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n - \sqrt{n}}} \quad (3)$$

$$= \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n - \sqrt{n}}} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \quad (4)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\frac{n + \sqrt{n}}{n}} + \sqrt{\frac{n - \sqrt{n}}{n}}} \quad (5)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} + \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}}} \quad (6)$$

$$\lim \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \quad (7)$$

$$\Rightarrow \lim(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}) = 1 \wedge \lim(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}) = 1 \quad (8)$$

$$\Rightarrow \lim \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} = 1 \wedge \lim \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}} = 1 \quad (9)$$

$$\Rightarrow \lim \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} + \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}} = 2 \neq 0 \quad (10)$$

$$\Rightarrow \lim a_n = \frac{\lim 2}{\lim(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} + \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}})} = \frac{2}{2} = 1 \quad (11)$$

- (d) siehe Tutorium