

(Teil-)Musterlösung zum 4. Aufgabenblatt
(Thilo Notz)

1. **Interpolation** (3 Punkte)

Geben Sie für jedes $n \geq 2$ ein Polynom $p_n(x) \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad n an, so dass gilt:

$$p_n(2) = -2, \quad p_n(-1) = 1, \quad p_n(3) = 1 \quad (1)$$

Begründen Sie kurz Ihre Konstruktion.

Lösung: Da wir drei Stützstellen haben, können wir das Interpolationspolynom vom Grad $n = 2$ bestimmen, indem wir das Schema der dividierten Differenzen anwenden.

$$\begin{array}{c|c} 2 & -2 \\ -1 & 1 \quad \frac{1-(-2)}{-1-2} = -1 \\ 3 & 1 \quad 0 \quad \frac{0-(-1)}{3-2} = 1 \end{array}$$

Das Interpolationspolynom für $n = 2$ ist also

$$\begin{aligned} p_2(x) &= -2 - 1 \cdot (x - 2) + 1 \cdot (x - 2)(x + 1) \\ &= x^2 - 2x - 2. \end{aligned}$$

Für $n > 2$ können wir dieses Verfahren nicht anwenden, da die Anzahl der Stützstellen zu gering ist. Wir können aber den Grad von p_2 erhöhen ohne die Interpolationseigenschaft (1) zu zerstören, indem wir ein Polynom q_n vom Grad n zu p_2 addieren, das die gegebenen Stützstellen als Nullstellen hat. Eine mögliche Wahl für q_n ist

$$q_n(x) = (x - 2)(x + 1)(x - 3)x^{n-3}.$$

Offenbar gilt $q_n(2) = q_n(-1) = q_n(3) = 0$ und $\text{Grad}(q_n) = n$. Dann erfüllt

$$\begin{aligned} p_n(x) &= p_2(x) + q_n(x) \\ &= x^2 - 2x - 2 + (x - 2)(x + 1)(x - 3)x^{n-3} \end{aligned}$$

die geforderten Eigenschaften.

2. **Polynomdivision** (3 Punkte) siehe Tutorium

3. **Gemischtes Komplexes** (8 Punkte)

- (a) siehe Tutorium
- (b) siehe Tutorium
- (c) Zeigen Sie, dass die folgende Menge abgeschlossen gegen Multiplikation ist.

$$\{a^2 + b^2 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

Hinweis: Sie müssen also zeigen, dass für beliebige ganze Zahlen a, b, c, d sich das Produkt $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ darstellen lässt als $x^2 + y^2$, wobei x, y wiederum ganze Zahlen sind. Es ist hilfreich, sich den Zusammenhang zum Betrag komplexer Zahlen klar zu machen.

Lösung: Um die gesuchte Darstellung zu finden, wenden wir die Beziehung $|zw| = |z||w|$, die für beliebige komplexe Zahlen z, w gilt, auf die Zahlen $z = a + ib$ und $w = c + id$ an. Wir haben dann

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) &= |z|^2 |w|^2 = |zw|^2 = |(a + ib)(c + id)|^2 \\ &= |(ac - bd) + i(bc + ad)|^2 \\ &= (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2.\end{aligned}$$

Mit $x = (ac - bd)$ und $y = (bc + ad)$ ist also $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = x^2 + y^2$ und natürlich gilt $x, y \in \mathbb{Z}$.

- (d) Zeigen Sie, dass für die Beträge komplexer Zahlen z und w die Dreiecksungleichung gilt:

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

Lösung: Für $z + w = 0$ ist die Ungleichung erfüllt, da auf der linken Seite 0 steht und die rechte Seite größer oder gleich 0 ist. Für den Fall $z + w \neq 0$ bemerken wir zunächst, dass für jede komplexe Zahl v gilt

$$\operatorname{Re} v \leq |v|, \quad (2)$$

denn

$$\operatorname{Re} v \leq |\operatorname{Re} v| = \sqrt{(\operatorname{Re} v)^2} \leq \sqrt{(\operatorname{Re} v)^2 + (\operatorname{Im} v)^2} = |v|.$$

Es ist

$$1 = \frac{z}{z + w} + \frac{w}{z + w} = \operatorname{Re} \left(\frac{z}{z + w} + \frac{w}{z + w} \right),$$

da 1 reell ist. Unter Benutzung von (2) erhalten wir

$$1 = \operatorname{Re} \frac{z}{z + w} + \operatorname{Re} \frac{w}{z + w} \leq \left| \frac{z}{z + w} \right| + \left| \frac{w}{z + w} \right| = \frac{|z|}{|z + w|} + \frac{|w|}{|z + w|}.$$

Multiplikation mit $|z + w|$ liefert die Behauptung.

- (e) Zeigen Sie, dass die Menge der komplexen Zahlen mit Betrag 1 bezüglich Multiplikation eine kommutative Gruppe bilden.

Lösung: Sei $S = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Jedes $z \in S$ lässt sich schreiben als $z = e^{i\varphi}$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$ und umgekehrt ist für jedes $\varphi \in \mathbb{R}$ immer $|e^{i\varphi}| = 1$. Also ist $S = \{e^{i\varphi}, \varphi \in \mathbb{R}\}$. Das Produkt zweier Zahlen $e^{i\varphi}, e^{i\psi} \in S$ lässt sich schreiben als

$$e^{i\varphi} e^{i\psi} = e^{i\varphi + i\psi} = e^{i(\varphi + \psi)}.$$

Daraus folgt, dass S bezüglich der Multiplikation abgeschlossen ist. Alle Gruppeneigenschaften folgen aus den entsprechenden Eigenschaften in \mathbb{R} :

- i. Assoziativität:

$$e^{i\varphi} (e^{i\psi} e^{i\rho}) = e^{i\varphi} e^{i(\psi + \rho)} = e^{i(\varphi + (\psi + \rho))} = e^{i((\varphi + \psi) + \rho)} = e^{i(\varphi + \psi)} e^{i\rho} = (e^{i\varphi} e^{i\psi}) e^{i\rho}$$

- ii. Das neutrale Element ist $1 = e^{i0} \in S$.

iii. Das Inverse zu $e^{i\varphi}$ ist $e^{-i\varphi}$:

$$e^{-i\varphi}e^{i\varphi} = e^{i(-\varphi+\varphi)} = e^{i0} = 1$$

iv. Kommutativität:

$$e^{i\varphi}e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)} = e^{i(\psi+\varphi)} = e^{i\psi}e^{i\varphi}.$$

4. Rechnen im Komplexen (6 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils alle komplexen Lösungen für die Gleichung

$$4x^4 + 4x^3 - 7x^2 + x - 2 = 0$$

als auch für Gleichung

$$x^6 + 1 = \sqrt{3}i$$

Lösung: (1. Gleichung siehe Tutorium) Wir haben die Gleichung $x^6 = \sqrt{3}i - 1$ zu lösen, also die 6-ten Wurzeln der Zahl $z = -1 + \sqrt{3}i$ zu bestimmen. Es ist $|z| = \sqrt{3+1} = 2$ und $\arg z = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi$, da $\operatorname{Im} z \geq 0$. Damit ist $z = 2e^{i\frac{2}{3}\pi}$. Die erste Lösung ist $x_0 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{1}{6}\frac{2}{3}\pi} = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{1}{9}\pi}$. Durch Drehen dieses Punktes um ganzzahlige Vielfache von $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, erhalten wir die übrigen 5 Wurzeln. Wir können die 6 Wurzeln also schreiben als

$$x_k = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{1}{9}\pi + i\frac{k}{6}2\pi} = \sqrt[6]{2}e^{i(\frac{1}{9} + \frac{k}{3})\pi}, \quad k = 0, \dots, 5$$

Ausgeschrieben lauten diese

$$\begin{aligned}x_0 &= \sqrt[6]{2}e^{i\frac{1}{9}\pi} \\x_1 &= \sqrt[6]{2}e^{i\frac{1}{9}\pi + i\frac{1}{6}2\pi} = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{4}{9}\pi} \\x_2 &= \sqrt[6]{2}e^{i\frac{1}{9}\pi + i\frac{1}{3}2\pi} = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{7}{9}\pi} \\x_3 &= \sqrt[6]{2}e^{i\frac{1}{9}\pi + i\frac{1}{2}2\pi} = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{10}{9}\pi} \\x_4 &= \sqrt[6]{2}e^{i\frac{1}{9}\pi + i\frac{2}{3}2\pi} = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{13}{9}\pi} \\x_5 &= \sqrt[6]{2}e^{i\frac{1}{9}\pi + i\frac{5}{6}2\pi} = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{16}{9}\pi}\end{aligned}$$