

(Teil-)Musterlösung zum 9. Aufgabenblatt  
(Thilo Notz)

1. **Zwischenwertsatz** (4 Punkte) s. Tutorium
2. **Eigenschaften von Funktionen untersuchen** (8 Punkte) Untersuchen Sie den Definitionsbereich, die Nullstellen, die Pole, die Symmetrien, das Verhalten für  $x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$  und die Asymptoten für die Funktionen:

$$f(x) = \frac{x^4}{(x^2 - 1)|x|} \quad f(x) = |x^2 - 1| + |x| - 1$$

Fertigen Sie eine Skizze der Graphen von  $f$  und (danach :-)) einen Plot mit Maple oder einem anderen Computer-Algebra-Programm.

**Lösung:** Der erste Teil wird korrigiert. Der maximale Definitionsbereich der zweiten Funktion ist  $\mathbb{R}$ , Polstellen sind nicht vorhanden. Es ist

$$f(-x) = |(-x)^2 - 1| + |-x| - 1 = |x^2 - 1| + |x| - 1 = f(x),$$

was zeigt, dass die Funktion symmetrisch zu  $y$ -Achse ist. Um die Nullstellen zu finden, schreiben wir die Funktion mittels Fallunterscheidung um, so dass die Beträge nicht mehr auftreten.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2, & x \in (-\infty, -1) \\ -x^2 - x, & x \in [-1, 0) \\ -x^2 + x, & x \in [0, 1) \\ x^2 + x - 2, & x \in [1, \infty) \end{cases}$$

Aus Symmetriegründen genügt es nur die beiden letzten Fälle zu untersuchen. Da die Funktion in jedem der Fälle ein Polynom zweiten Grades ist, gibt es maximal 2 Nullstellen für die einzelnen Fälle. Die Gleichung

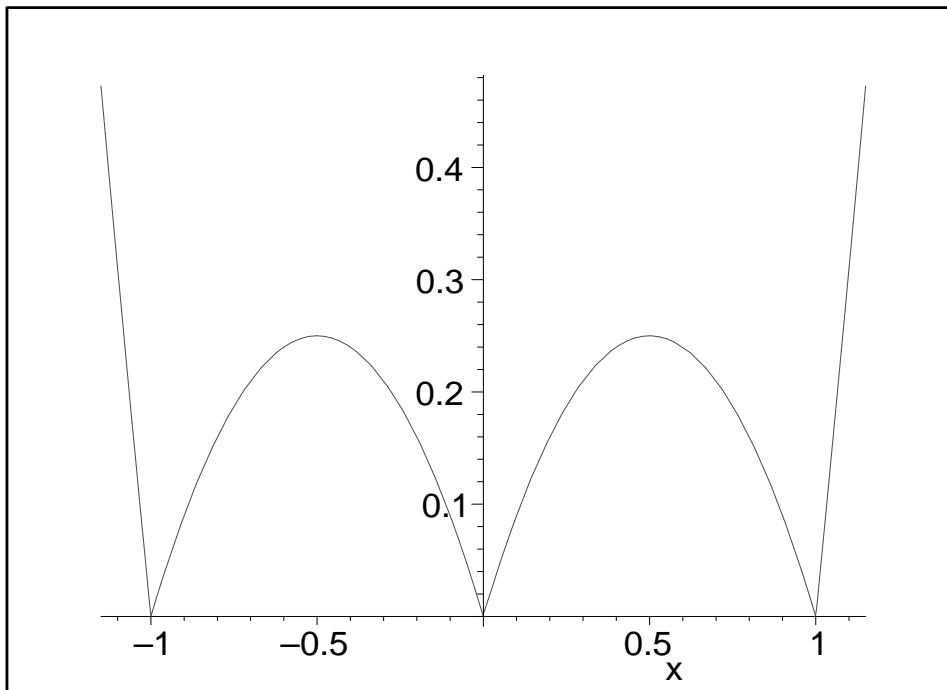
$$-x^2 + x = 0$$

hat die Nullstellen 0 und 1, doch 1 liegt nicht im Bereich  $[0, 1)$ . Im letzten Fall erhalten wir als Lösung der Gleichung

$$x^2 + x - 2 = 0$$

die Werte  $x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$ . Da wir in diesem Fall  $x \geq 1$  vorausgesetzt haben, ist nur die Lösung  $x_1 = 1$  relevant. Unter Berücksichtigung der Achsensymmetrie haben wir also die Nullstellen  $-1, 0, 1$ . (Diese hätte man natürlich auch leicht durch ausprobieren gefunden, aber dann wüssten wir nicht, dass wir *alle* Nullstellen gefunden haben.) Für  $x \geq 2$  gilt  $f(x) \geq x^2 \geq x$  und wegen  $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$  folgt  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  nach dem Vergleichskriterium. Wegen der Symmetrie gilt auch  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ . Die Funktion hat keine Asymptoten. Ein Plot lässt sich folgendermaßen mit Maple erstellen:

```
> f:= x->abs(x^2-1)+abs(x)-1:
> plot(f(x),x=-1.15..1.15);
```



3. **Ableitungen** (4 Punkte) Bilden Sie die Ableitung von:

$$\cos^3 x ; \quad \frac{(a^2 + x^2)^2}{(a^3 + x^3)^3} ; \quad \tan \sqrt{2 - \sin^2 x} ; \quad \frac{x^2}{\cos x}$$

**Lösung:** Nach der Kettenregel gilt mit  $(\cos x)' = -\sin x$

$$(\cos^3 x)' = -3 \cos^2 x \sin x.$$

Ableiten nach der Produkt- und Kettenregel ergibt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{(a^2 + x^2)^2}{(a^3 + x^3)^3} \right) &= \frac{2(a^2 + x^2)2x}{(a^3 + x^3)^3} - \frac{(a^2 + x^2)^2}{(a^3 + x^3)^6} 3(a^3 + x^3)^2 3x \\ &= \frac{4x(a^2 + x^2)}{(a^3 + x^3)^3} - \frac{9x^2(a^2 + x^2)^2}{(a^3 + x^3)^4}. \end{aligned}$$

Der Rest wird korrigiert.

4. **Potenzregel** (2 Punkte) Beweisen sie unter Verwendung der Produktregel, dass für natürliches  $n$  und  $y = x^n$  gilt:  $y' = nx^{n-1}$ .

**Lösung:** Wir führen den Beweis für  $n > 0$  durch Induktion. (Für  $n = 0$  ergibt die Behauptung an der Stelle  $x = 0$  keinen Sinn.)

*Induktionsanfang:* Für  $n = 1$  gilt  $(x)' = 1 = 1 \cdot x^0$ .

*Induktionsschritt:* Sei die Behauptung für  $n - 1 > 0$  wahr. Nach der Produktregel gilt

$$\begin{aligned}(x^n)' &= (x)' x^{n-1} + x (x^{n-1})' \\ &= x^{n-1} + x(n-1)x^{n-2} \text{ (nach Induktionsannahme)} \\ &= nx^{n-1},\end{aligned}$$

was zu zeigen war.