

1 Kontraposition

$$\neg(3|n) \vee \neg(3|m) \Rightarrow \neg(3|(n+m)) \vee \neg(3|(n-m))$$

Kontraposition:

$$3|(n+m) \wedge 3|(n-m) \Rightarrow 3|n \wedge 3|m$$

Beweis:

Der Beweis gliedert sich in zwei Fälle auf:

i)

$$3|(n+m) \wedge 3|(n-m) \Rightarrow 3|n$$
$$\exists h, k, l \in \mathbb{G} : \frac{n+m}{3} = h \wedge \frac{n-m}{3} = k \Rightarrow \frac{n}{3} = l$$

ii)

$$3|(n+m) \wedge 3|(n-m) \Rightarrow 3|m$$
$$\exists h, k, l \in \mathbb{G} : \frac{n+m}{3} = h \wedge \frac{n-m}{3} = k \Rightarrow \frac{m}{3} = l \quad \square$$

2 Fibonacci

$$F_0 = F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ für } n > 1$$

a) Es ist $\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1$ für $n \geq 0$ per vollständiger Induktion zu beweisen.

Induktionsanfang:

$$n = 0$$

$$1 = 2 - 1$$

$$1 = 1 \quad \text{wahre Aussage}$$

Induktionsschritt:

Es gelte $\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1$, so soll auch $\sum_{i=0}^{n+1} F_i = F_{n+3} - 1$ gelten.

$$\sum_{i=0}^{n+1} F_i = \sum_{i=0}^n F_i + F_{n+1}$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} F_i = F_{n+2} - 1 + F_{n+1} \quad | \text{ nach Voraussetzung}$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} F_i = F_{n+3} - 1 \quad | \text{ nach Definition von F} \quad \square$$

b) Es ist $F_0 + F_2 + F_4 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1}$ für $n \geq 0$ per vollständiger Induktion zu beweisen.

Induktionsanfang:

$n = 0$	$n = 1$	
$F_0 = F_1$	$F_0 + F_2 = F_3$	
$1 = 1$	$1 + 2 = 3$	wahre Aussage

Induktionsschritt:

Es gelte $F_0 + F_2 + F_4 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1}$, so soll auch $F_0 + F_2 + F_4 + \dots + F_{2(n+1)} = F_{2(n+1)+1}$, also $F_0 + F_2 + F_4 + \dots + F_{2n+2} = F_{2n+3}$ gelten.

$$\begin{aligned}
 F_{2n+3} &= F_{2n+1} + F_{2n+2} && | \text{ nach Definition von F} \\
 F_{2n+3} &= F_0 + F_2 + F_4 + \dots + F_{2n} + F_{2n+2} && | \text{ nach Voraussetzung} \\
 F_{2n+3} &= F_{2(n+1)+1} && | \text{ nach Voraussetzung} \\
 F_{2n+3} &= F_{2n+3} && \square
 \end{aligned}$$

c) Es sind F_{3n}, f_{3n+1} ungerade und F_{3n+2} gerade für $n \geq 0$. Dies ist per vollständiger Induktion zu beweisen.

Induktionsanfang:

$$\begin{aligned}
 n &= 0 \\
 F_0 &= 1 \\
 F_1 &= 1 \\
 F_2 &= 2 \quad \text{wahre Aussage}
 \end{aligned}$$

Induktionsschritt:

Es gelte F_{3n}, f_{3n+1} ungerade und F_{3n+2} gerade, so soll auch $F_{3(n+1)}, f_{3(n+1)+1}$ ungerade und $F_{3(n+1)+2}$, also F_{3n+3}, f_{3n+4} ungerade und F_{3n+5} gerade gelten.

$$\begin{aligned}
 F_{3n+3} &= \underbrace{F_{3n+2}}_{\text{nach Vorauss. gerade}} + \underbrace{F_{3n+1}}_{\text{nach Voraus. ungerade}} && | \text{ nach Definition von F} \\
 &\Rightarrow F_{3n+3} \text{ ungerade, weil gerade+ungerade} \\
 F_{3n+4} &= \underbrace{F_{3n+3}}_{\text{nach Vorauss. ungerade}} + \underbrace{F_{3n+2}}_{\text{nach Voraus. gerade}} && | \text{ nach Definition von F} \\
 &\Rightarrow F_{3n+4} \text{ ungerade, weil ungerade+gerade} \\
 F_{3n+5} &= \underbrace{F_{3n+4}}_{\text{nach Vorauss. ungerade}} + \underbrace{F_{3n+3}}_{\text{nach Voraus. ungerade}} && | \text{ nach Definition von F} \\
 &\Rightarrow F_{3n+5} \text{ gerade, weil ungerade+ungerade} \quad \square
 \end{aligned}$$

3 Geschlossene Form

Es ist für die rekursive Folge $a_0 = a_1 = 1$, $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ für $n \geq 2$ zu zeigen, dass $a_n = \frac{1}{2} * 3^n + \frac{1}{2} * (-1)^n$ für alle n gilt.

Der Beweis wird per vollständiger Induktion geführt.

Induktionsanfang:

$$n = 2$$

$$\begin{aligned} a_2 &= 2 * a_1 + 3 * a_0 & a_2 &= \frac{1}{2} * 3^2 + \frac{1}{2} * (-1)^2 \\ a_2 &= 2 * 1 + 3 * 1 & a_2 &= \frac{9}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{wahre Aussage} \end{aligned}$$

$$n = 3$$

$$\begin{aligned} a_3 &= 2 * a_2 + 3 * a_1 & a_3 &= \frac{1}{2} * 3^3 + \frac{1}{2} * (-1)^3 \\ a_3 &= 2 * 5 + 3 * 1 & a_3 &= \frac{27}{2} - \frac{1}{2} \quad \text{wahre Aussage} \end{aligned}$$

Induktionsschritt:

Es gelte $a_n = \frac{1}{2} * 3^n + \frac{1}{2} * (-1)^n$ und $a_{n+1} = \frac{1}{2} * 3^{n+1} + \frac{1}{2} * (-1)^{n+1}$, so soll auch $a_{n+2} = \frac{1}{2} * 3^{n+2} + \frac{1}{2} * (-1)^{n+2}$ gelten.

$$a_{n+1} = 2 * a_n + 3 * a_{n-1} \quad | \text{ nach Definition von Folge}$$

$$a_{n+1} = 2 * \left(\frac{1}{2} * 3^n + \frac{1}{2} * (-1)^n \right) + 3 * \left(\frac{1}{2} * 3^{n-1} + \frac{1}{2} * (-1)^{n-1} \right) \quad | \text{ nach Vorauss.}$$

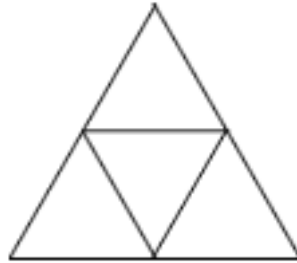
$$a_{n+1} = 2 * \left(\frac{1}{6} * 3^{n+1} + \frac{-1}{2} * (-1)^{n+1} \right) + 3 * \left(\frac{1}{18} * 3^{n+1} + \frac{1}{2} * (-1)^{n+1} \right)$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{3} * 3^{n+1} - (-1)^{n+1} + \frac{1}{6} * 3^{n+1} + \frac{3}{2} * (-1)^{n+1}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} * 3^{n+1} + \frac{1}{2} * (-1)^{n+1} \quad \square$$

4 Schubfach-Prinzip I

a) Man unterteilt das gleichseitige Dreieck in 4 kongruente Dreiecke der Seitenlänge 0,5. Da das Ausgangsdreieck gleichseitig ist, sind auch die kleinen Dreiecke gleichseitig.



Es müssen nun 5 Punkte in diese 4 Dreiecke verteilt werden, hier kommt das Schubfachprinzip zum Zuge: Wir wissen, dass in eines der Dreiecke mind. 2 Punkte reinkommen! Der maximale Abstand innerhalb eines solchen Dreiecks ist die Höhe, welche sich als $h = \frac{\sqrt{3}}{2} * a$ berechnet. Für $a = 0,5$ in unserem Fall ergibt sich $h \approx 0,433$. Dies ist aber kleiner als der geforderte Abstand von 0,5 zwischen den Punkten. Es müssen also zwei Punkte einen Abstand kleiner als 0,5 haben, wenn sie in einem Dreieck liegen! \square