

1 Abzählen

a) Bei einer beliebigen Verteilung von 40 Aufträgen auf 10 Weihnachtsmänner gibt es 10^{40} Möglichkeiten., da es sich hierbei um eine beliebige Funktion von unterscheidbaren Bällen auf unterscheidbare Fächer handelt.

Wenn jeder Weihnachtsmann jedoch mind. einen Auftrag erhalten soll, so entspricht dies einer surjektiven Funktion. Demnach lässt sich die Anzahl an Möglichkeiten mit $10! * S_{40,10}$ berechnen.

b) Es handelt sich hier um eine beliebige Funktion von 200 nicht unterscheidbaren Kugeln und 4 unterscheidbare Bäume, die Anzahl der Möglichkeiten wird also nach $\binom{n+r-1}{r-1}$ berechnet. Hier ergibt sich $\binom{203}{3} = 1.373.701$ als die Anzahl der Möglichkeiten. Wenn jedoch jeder Baum mind. 30 Kugeln erhalten soll, entspricht dies einer geordneten Zahlpartition von $200 - 4 * 29$ Kugeln auf 4 Bäumen (jeder Baum erhält somit mind. 30 Kugeln). Die Zahlpartition lässt sich über $\binom{n-1}{r-1}$ berechnen. In diesem Fall ergibt sich $\binom{83}{3} = 91.881$.

c) Die Anzahl der beliebigen Verteilung von 10 ununterscheidbaren Weihnachtsmännern auf 30 unterscheidbare Drinks kann wie in Aufgabe 1b) berechnet werden; es ergibt sich $\binom{39}{9} = 211.915.132$.

2 3 Würfel

Um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass bei drei Würfelwürfen mind. 1 mal die gewünschte Zahl auftaucht, kann das Komplementärereignis gebildet werden; d.h. die gewünschte Zahl tritt bei drei Würfeln nicht auf.

$A = \text{Gewünschte Zahl tritt mind. 1 mal auf} \Rightarrow \bar{A} = \text{Gewünschte Zahl tritt nicht auf}$

$$Pr(\bar{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

$$Pr(\bar{A}) = 0,579$$

$$Pr(A) = 1 - Pr(\bar{A})$$

$$Pr(A) = 1 - 0,579$$

$$Pr(A) = 0,421$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine gewünschte Zahl mind. mal bei drei Würfeln auftritt entspricht ca. 42% , da die Gewinnwahrscheinlichkeit unter 50% liegt, lässt man sich nicht auf ein solches Spiel ein.

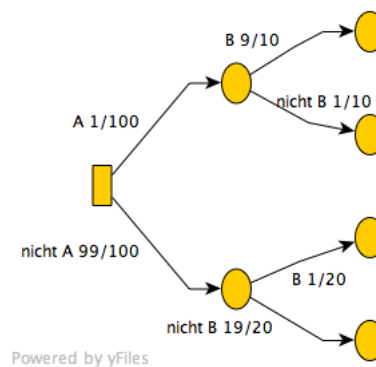
3 Prüfungsangst

Es soll die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass eine zufällige Person Prüfungsangst hat unter der Bedingung, dass sie zitterige Hände hat.

A = Person hat Prüfungsangst

$$Pr(A) = \frac{1}{100}$$

B = Person hat zitterige Hände



$$Pr(A \cap B) = \frac{1}{100} * \frac{9}{10} = 0,009$$

$$Pr(\bar{A} \cap B) = \frac{99}{100} * \frac{1}{20} = 0,0495$$

$$Pr(B) = Pr(A \cap B) + Pr(\bar{A} \cap B) = 0,009 + 0,0495 = 0,0585$$

$$Pr(A|B) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(B)} = \frac{0,009}{0,0585} = 0,154$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte Person Prüfungsangst hat, wenn sie zitterige Hände hat, beträgt ca. 15%.

4 Unabhängigkeit

Die gegebenen Ereignisse werden auf paarweise, dreifache und vierfache Unabhängigkeit untersucht.

$$\Omega = \{(000), (100), (010), (001), (110), (101), (011), (111)\}$$

$$Pr(A) = \frac{1}{2}$$

$$Pr(B) = \frac{1}{2}$$

$$Pr(C) = \frac{1}{2}$$

$$Pr(D) = \frac{1}{2}$$

$$Pr(A \cap B) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = Pr(A) * Pr(B) \Rightarrow \text{unabhängig}$$

$$Pr(A \cap C) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = Pr(A) * Pr(C) \Rightarrow \text{unabhängig}$$

$$Pr(A \cap D) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = Pr(A) * Pr(D) \Rightarrow \text{unabhängig}$$

$$Pr(B \cap C) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = Pr(B) * Pr(C) \Rightarrow \text{unabhängig}$$

$$Pr(B \cap D) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = Pr(B) * Pr(D) \Rightarrow \text{unabhängig}$$

$$Pr(C \cap D) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = Pr(A) * Pr(B) \Rightarrow \text{unabhängig}$$

$$Pr(A \cap B \cap C) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = Pr(A) * Pr(B) * Pr(C) \Rightarrow \text{unabhängig}$$

$$Pr(A \cap B \cap D) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = Pr(A) * Pr(B) * Pr(D) \Rightarrow \text{unabhängig}$$

$$Pr(B \cap C \cap D) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = Pr(B) * Pr(C) * Pr(D) \Rightarrow \text{unabhängig}$$

$$Pr(A \cap C \cap D) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = Pr(A) * Pr(C) * Pr(D) \Rightarrow \text{unabhängig}$$

$$Pr(A \cap B \cap C \cap D) = 0 \neq \frac{1}{18} = Pr(A) * Pr(B) * Pr(C) * Pr(D) \Rightarrow \text{nicht unabhängig}$$

Es besteht jeweils paarweise sowie dreifache Unabhängigkeit, jedoch keine totale.

5 Zwei aus Drei

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass drei Spiele notwendig sind, kann über die Wahrscheinlichkeit des Komplementärereignisses, dass nämlich nur zwei Spiele notwendig sind, berechnet werden.

A = 3 Spiele notwendig

$$Pr(\bar{A}) = \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$Pr(\bar{A}) = 0,52$$

$$Pr(A) = 1 - Pr(\bar{A})$$

$$Pr(A) = 1 - 0,52$$

$$Pr(A) = 0,48$$

In 48% der Fälle sind alle drei Spiele notwendig.

b) Es ist die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass der Sieger des Spiels das erste Spiel verliert.

A = Sieger verliert erstes Spiel

$$Pr(A) = \underbrace{\frac{2}{5} * \left(\frac{3}{5}\right)^2}_{\text{B gewinnt erstes Spiel}} + \underbrace{\frac{3}{5} \left(\frac{2}{5}\right)^2}_{\text{A gewinnt erstes Spiel}}$$

$$Pr(A) = 0,24$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Gewinner das erste Spiel verliert beträgt 24%.

c) Es ist die Wahrscheinlichkeit für den Sieg von Spieler A zu berechnen.

A = A gewinnt

$$Pr(A) = \underbrace{\left(\frac{3}{5}\right)^2}_{\text{A gewinnt ersten beiden Spiele}} + \underbrace{2 * \frac{2}{5} * \left(\frac{3}{5}\right)^2}_{\text{B gewinnt entweder erstes oder zweites Spiel}}$$

$$Pr(A) = 0,648$$

Spieler A gewinnt in ca. 65% der Spiele.