

## 1 Relationen und Funktionen

definierende Aussageform	$A = \mathbb{N}$	$A = \mathbb{Q}$	$A = \mathbb{R}^+$
$\{(x, y) \in A \times A \mid \frac{y}{x+1} = 3\}$	i	b	i
$\{(x, y) \in A \times A \mid \frac{x}{y+1} = 3\}$	x	b	x
$\{(x, y) \in A \times A \mid x^2 - y - 2 = 0\}$	x	f	x
$\{(x, y) \in A \times A \mid x - y^2 + 2 = 0\}$	x	x	i
$\{(x, y) \in A \times A \mid x^2 - y^2 = 0\}$	b	b	b

Zur letzten Zeile: Gilt nur, wenn man nur die positive Wurzel betrachtet.

## 2 Injektiv-Surjektiv

Es ist zu zeigen, dass genau dann wenn  $f$  surjektiv ist,  $g$  injektiv ist.

$$f : A \rightarrow B$$

$$g : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A)$$

$$N \subseteq B : g(N) = f^{-1}(N)$$

$$M \subseteq A$$

Beweis wird in zwei Schritten gemacht.

Vorüberlegung: Für eine bestimmte Untermenge  $M \in \mathcal{P}(A)$  muss wegen Injektivität  $g^{-1}$  surjektiv (und auch bijektiv) sein.

1.  $g$  injektiv  $\Rightarrow f$  surjektiv

$$g^{-1}(M) = N$$

$$g(N) = M$$

$$f^{-1}(N) = M$$

$$f(M) = N$$

2.  $f$  surjektiv  $\Rightarrow g$  injektiv

$$f(A) = B$$

$$\text{insbesondere: } f(M) = N$$

$$f^{-1}(N) = M$$

$$g(N) = M$$

$$g^{-1}(M) = N \quad \square$$

### 3 Bijektion

$$f : (0; 1) \rightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{\frac{1}{2} - x}{x(1-x)}$$

Um die Bijektivität zu beweisen muss Surjektivität und Injektivität im offenen Intervall nachgewiesen werden.

#### 1. Surjektivität

Grenzwerte werden ermittelt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} - x}{x(1-x)} \rightarrow +\infty$$
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2} - x}{x(1-x)} \rightarrow -\infty$$

Um nun zu zeigen, dass  $f$  wirklich surjektiv ist, muss noch geprüft werden, ob die Funktion im Definitionsbereich stetig ist.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{2} - x}{x(1-x)} = \frac{\frac{1}{2} - x_0}{x_0(1-x_0)}$$
$$f(x_0) = \frac{\frac{1}{2} - x_0}{x_0(1-x_0)}$$

Da Grenzwert an der Stelle  $x_0$  mit dem Funktionswert dort übereinstimmt, ist die Funktion stetig und somit auch surjektiv.

2. Injektivität Es muss geprüft werden, ob jeder Wert des Wertebereiches genau einmal erreicht wird. Wenn dem so ist, dann muss die Funktion streng monoton fallend sein, d.h.  $f'(x) < 0$  für alle  $x$ .

$$f'(x) = \frac{-x^2 + x - \frac{1}{2}}{(x - x^2)^2}$$
$$f'(0,5) = -4$$

Kann  $f(x)$  null werden?

$$0 = -x^2 + x - \frac{1}{2} \quad | \text{ Nenner kann vernachlässigt werden, da er nicht null werden darf.}$$

$$0 = x^2 - x + \frac{1}{2}$$

$$x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}} \rightarrow \text{nicht lösbar!}$$

$\Rightarrow$  Es gibt keine Stelle, wo  $f(x)$  nicht streng monoton ist, insbesondere in  $(0;1)$

Da  $f(x)$  also streng monoton ist, ist sie auch injektiv.

Wegen Surjektivität und Injektivität folgt die Bijektivität.  $\square$