

**Mathematik für Informatiker I**  
(Frank Hoffmann)

Abgabe bis Mittwoch, den 14. Februar 2007 bis 13<sup>00</sup>

**1. Resolution I** (3 Punkte)

Zeigen Sie mittels Resolutionsmethode, dass  $x \wedge y \wedge z$  eine Folgerung ist aus der Klauselmenge

$$F = \{\{\neg x, y\}, \{\neg y, z\}, \{x, \neg z\}, \{x, y, z\}\}$$

**2. Resolution II** (3 Punkte)

Sei  $t$  die Formel

$$t = (a \wedge \neg c \wedge d) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (\neg a \wedge d)(a \wedge \neg d) \vee \neg a$$

Zeigen Sie mit dem Resolutionsverfahren, dass  $t$  Tautologie ist. Stellen Sie den Resolutionsbeweis graphisch dar!

**3. Resolution III** (4 Punkte)

Lösen Sie auch die folgenden zwei Fragen durch Verwendung des Resolutionskalküls.

a) Ist der folgende Term erfüllbar?

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge \neg x_3$$

b) Ist der folgende Term eine Tautologie?

$$(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_3) \vee \neg x_2$$

**4. Bäume** (4 Zusatzpunkte)

(a) Beweisen Sie, dass in einem Baum mit  $n$  Knoten die Summe der Knotengrade gleich  $2n - 2$  ist.

(b) Beweisen Sie induktiv, dass es für positive ganze Zahlen  $d_1, \dots, d_n$ , deren Summe gleich  $2n - 2$  ist, immer einen Baum auf  $n$  Knoten existiert, deren Knotengrade genau diese Zahlen  $d_1$  bis  $d_n$  sind.

Tipp: Beginnen Sie bei  $n = 2$ . Wie sehen da  $d_1$  und  $d_2$  aus? Und bei  $n > 2$  muss es bei den Zahlen welche geben, die gleich 1 sind und welche, die  $> 1$  sind. Warum?

**5. Graphen** (4 Zusatzpunkte)

(a) Sei  $G$  ungerichteter Graph. Zeigen Sie, dass der Komplementgraph  $G^c$  zusammenhängend ist, falls  $G$  nicht zusammenhängend ist.

(b) Sei  $G$  ein ungerichteter zusammenhängender Graph mit durchschnittlichem Knotengrad  $> 2$ . Zeigen Sie, dass  $G$  dann mindestens zwei Kreise hat.