

1 Kommunikation

Die Wahrscheinlichkeit, dass A mit B kommunizieren kann, setzt sich aus der direkten Kommunikationswahrscheinlichkeit und der indirekten über Knoten C zusammen.

$$Pr(\text{A kommuniziert mit C}) = Pr(\text{A direkt zu C}) + Pr(\text{A über B zu C})$$

$$Pr(\text{A kommuniziert mit C}) = 0,5 + 0,9 * 0,8$$

2 Täter gesucht

X - Ware von X

$$Pr(X) = 0,2$$

Y - Ware von Y

$$Pr(Y) = 0,3$$

Z - Ware von Z

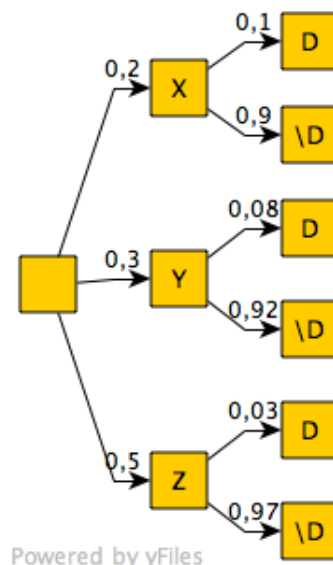
$$Pr(Z) = 0,5$$

D - Ware defekt

$$Pr(D|X) = 0,1$$

$$Pr(D|Y) = 0,08$$

$$Pr(D|Z) = 0,03$$



$$Pr(Y|D) = \frac{Pr(Y \cap D)}{Pr(D)}$$

$$Pr(D) = Pr(X) * Pr(D|X) + Pr(Y) * Pr(D|Y) + Pr(Z) * Pr(D|Z)$$

$$Pr(D) = 0,2 * 0,1 + 0,3 * 0,08 + 0,5 * 0,03$$

$$Pr(D) = 0,02 + 0,032 + 0,015$$

$$Pr(D) = 0,067$$

$$Pr(Y \cap D) = Pr(D|Y) * Pr(Y)$$

$$Pr(Y \cap D) = 0,3 * 0,08$$

$$Pr(Y \cap D) = 0,032$$

$$Pr(Y|D) = \frac{0,032}{0,067}$$

$$Pr(Y|D) = 0,478$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die defekte Ware von Y stammt, beträgt ca. 48 Prozent.

3 5 Karten

a) KA - Kreuzass, A - Ass

$$Pr(A|KA) = \frac{Pr(A \cap KA)}{Pr(KA)}$$

KA muss gezogen werden, und 4 beliebige von restlichen 51

$$Pr(KA) = \frac{\overbrace{\binom{51}{4} * \binom{1}{1}}}{\binom{52}{5}} = 0,096$$

KA muss gezogen werden, eins von 3 verbleibenden Assen und 3 bel. von restlichen 48

$$Pr(A \cap KA) = \frac{\overbrace{\binom{48}{3} * \binom{1}{1} * \binom{3}{1}}}{\binom{52}{5}} = 0,020$$

$$Pr(A|KA) = \frac{0,020}{0,096} = 0,208$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass man, wenn man schon das Kreuzass hat, noch ein zweites Ass bei fünf Karten hat, beträgt ca. 21 %.

b) A1 - ein Ass, A - Ass

$$Pr(A|A1) = \frac{Pr(A \cap A1)}{Pr(A1)}$$

eins von 4 Assen muss gezogen werden, und 4 beliebige von restlichen 51

$$Pr(A1) = \frac{\overbrace{\binom{48}{4} * \binom{4}{1}}^{\binom{52}{5}}}{\binom{52}{5}} = 0,299$$

Ass muss gezogen werden, eins von 3 verbleibenden Assen und 3 bel. von restlichen 48

$$Pr(A \cap KA) = \frac{\overbrace{\binom{48}{3} * \binom{1}{1} * \binom{3}{1}}^{\binom{52}{5}}}{\binom{52}{5}} = 0,020$$

$$Pr(A|KA) = \frac{0,020}{0,299} = 0,067$$

Die Wahrscheinlichkeit bei einem bereits erhaltenen Ass noch ein weiteres gezogen zu haben beträgt ca. 7%.

4 Geschenke verpacken

Die Wahrscheinlichkeit, dass genau 10 Leute von 11 das richtige Geschenk erhalten, beträgt genau 0% , da das Geschenk der Person, die das falsche erhält, ja mit einem anderen getauscht worden sein muss, so dass noch ein weiterer ein falsches Geschenk bekommen müsste.

5 Schneebälle werfen

A - Alice trifft

$$Pr(A) = \frac{2}{5}$$

B - Bob trifft

$$Pr(B) = \frac{1}{4}$$

Alice und Bob werfen nun in folgender Reihenfolge: A BB AA BB AA usw.
Es ist nun die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, mit der Alice zuerst trifft.

$$\begin{aligned}
 Pr(\text{A trifft zuerst}) &= \frac{2}{5} + \frac{3}{5} * \frac{3}{4} * \frac{3}{4} * \frac{2}{5} + \frac{3}{5} * \frac{3}{4} * \frac{3}{4} * \frac{3}{5} * \frac{2}{5} + \frac{3}{5} * \frac{3}{4} * \frac{3}{4} * \frac{3}{5} * \frac{3}{5} * \frac{3}{4} * \frac{3}{4} * \frac{2}{5} + \dots \\
 Pr(\text{A trifft zuerst}) &= \frac{2}{5} + \frac{2}{5} * \left(\sum_{i=1} \left(\frac{3}{5} \right)^{2i-1} * \left(\frac{3}{4} \right)^{2i} + \sum_{i=1} \left(\frac{3}{5} \right)^{2i} * \left(\frac{3}{4} \right)^{2i} \right) \\
 Pr(\text{A trifft zuerst}) &= \frac{2}{5} + \frac{2}{5} * \left(\sum_{i=0} \left(\frac{3}{5} \right)^{2i+1} * \left(\frac{3}{4} \right)^{2i+2} + \sum_{i=0} \left(\frac{3}{5} \right)^{2i+2} * \left(\frac{3}{4} \right)^{2i+2} \right) \\
 Pr(\text{A trifft zuerst}) &= \frac{2}{5} + \frac{2}{5} * \left(\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{i=0} \frac{3}{4} \left(\frac{9}{20} \right)^{2i+1} + \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{i=0} \left(\frac{9}{20} \right)^{2i+2} \right) \\
 Pr(\text{A trifft zuerst}) &= \frac{2}{5} + \frac{2}{5} * \left(\frac{3}{4} * \frac{1}{1 - \frac{9}{20}} + \frac{1}{1 - \frac{9}{20}} \right)
 \end{aligned}$$

(hier muss irgendwo ein Fehler drin sein, da die Wahrscheinlichkeit hier größer als 1 wäre, was nicht sein kann)

6 Minitetris

a)

Die Rekursionsgleichung für die Anzahl der Belegungen lautet

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$$

mit $A_1 = 0$

$$A_2 = 2$$

Wie lautet die geschlossene Formel?

Annahme: $f(n) = cx^n$, daraus folgt

$$cx^n = cx^{n-1} + cx^{n-2} \quad | : cx^{n-2}$$

$$x^2 = x + 1$$

$$0 = x^2 - x - 1$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow x_{1/2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 1} \\
&= \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \\
x_1 &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\
x_2 &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Es gibt für A_n also zwei Lösungen:

$$\begin{aligned}
A_n &= c_1 * \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \text{und} \\
A_n &= c_2 * \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

Da Linearkombinationen auch wieder Lösungen ergeben, ist folgendes auch eine Lösung:

$$A_n = c_1 * \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 * \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Mit Hilfe der Randbedingungen kann ein lineares Gleichungssystem aufgestellt werden, mit dem c_1 und c_2 berechnet werden

$$\begin{aligned}
A_1 = 1 &= c_1 * \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_2 * \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^1 \\
A_2 = 2 &= c_1 * \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_2 * \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Als Lösungen ergeben sich: (Berechnung siehe Anhang)

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{2\sqrt{5} + 6}{2\sqrt{5} + 10} \\
c_2 &= \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

Die geschlossene Formel lautet also

$$A_n = \frac{2\sqrt{5} + 6}{2\sqrt{5} + 10} * \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} * \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

b) Wenn auch 2x2 Stücke zugelassen werden, ändert sich die Rekursionsformel in

$$A_n = A_{n-1} + 2A_{n-2}$$

mit $A_1 = 1$

$$A_2 = 3$$

Wie lautet die geschlossene Formel?

Annahme: $f(n) = cx^n$, daraus folgt

$$cx^n = cx^{n-1} + 2cx^{n-2} \quad | : cx^{n-2}$$

$$x^2 = x + 2$$

$$0 = x^2 - x - 2$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 2}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{9}}{2}$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -1$$

Auch hier gibt es für A_n zwei Lösungen: (Berechnungen siehe Anhang)

$$A_n = c_1 * 2^n \text{ und}$$

$$A_n = c_2 * (-1)^n$$

Auch hier wird wieder eine Linearkombination gebildet, mit der dann c_1 und c_2 berechnet werden.

$$A_n = c_1 * 2^n + 2c_2 * (-1)^n$$

$$A_1 = 1 = c_1 * 2 + 2c_2 * (-1)^1$$

$$A_2 = 3 = c_1 * 2^2 + 2c_2 * (-1)^2$$

Es ergibt sich $c_1 = \frac{2}{3}$ und $c_2 = \frac{1}{6}$.

Die geschlossene Formel lautet also:

$$A_n = \frac{2}{3} * 2^n + \frac{1}{3} * (-1)^n$$