

1 Richtig oder Falsch?

Um am meisten Kanten unterzubringen, wählen wir zwei Zusammenhangskomponenten, in denen jeweils nur ein Knoten ist, und in der dritten Zusammenhangskomponente müssen sich folglich die restlichen 10 Knoten befinden. Ohne Doppelkanten erreicht man die höchste Anzahl von Kanten, in dem man hier einen vollständigen Graphen bildet, d.h. dass jeder mit jedem anderen verbunden ist.

Der erste Knoten hat also 9 Kanten, der zweite 8 neue, dann 7 usw. Es gibt also nur $\sum_{i=1}^9 i = 45$ Kanten, und somit ist die Aussage falsch!

2 Graphen färben

Es wird ein Beweis per vollständiger Induktion über k geführt.

Induktionsanfang: $k = 1$, d.h. ein Graph, bestehend aus zwei Knoten, um zu Färben benötigt man $2 = 1 + 1$ Farben.

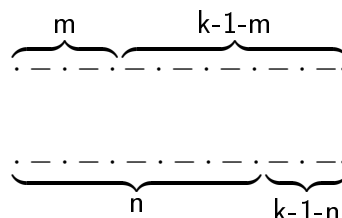
Induktionsschritt: Es gelte, dass man die adjazenten Knoten bei Graphen mit Maximalgrad k mit $k + 1$ Farben färben kann, so soll auch gelten, dass Graphen mit dem Maximalgrad $k + 1$ in $k + 2$ Farben gefärbt werden können.

Man betrachtet einen Knoten mit Maximalgrad k , nach Induktionsannahme lässt sich der dazugehörige Graph mit $k + 1$ Farben färben. Erhöht man nun den Grad des Knotens durch Anfügen einer Kante um eins, d.h. ein Knoten kommt dazu, dann wird eine zusätzliche Farbe benötigt, um diesen neuen Knoten zu färben. Also statt $k + 1$ werden nun $k + 2$ Farben benötigt. \square

3 Längste Wege

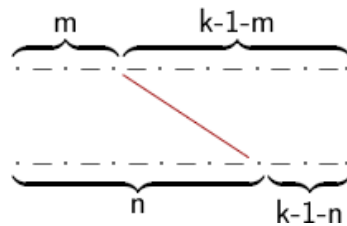
Es wird ein indirekter Beweis geführt.

Es sei G ein zusammenhängender ungerichteter Graph und es gebe zwei längste Wege der Länge $k - 1$ ohne einen gemeinsamen Knoten.



Da es sich um einen zusammenhängenden Graphen handelt, müssen an irgendeiner Stelle die beiden längsten Wege verbunden sein.

Geht die Verbindungskante von Knoten Nummer m zu Knoten Nummer n , gibt es mehrere auftretende Fälle.



1. **Fall $n > m$** Man erhält einen Weg, der die Länge $n + (k-1-m) + 1 = n + k - m \geq k - 1$ hat. Hier liegt ein Widerspruch vor, da angenommen wurde, dass es sich bereits um längste Wege handelt.
2. **Fall $n < m$** Man erhält einen Weg, der die Länge $m + (k-1-n) + 1 = m + k - n \geq k - 1$. Hier tritt ein Widerspruch auf, da angenommen wurde, dass es sich bereits um längste Wege handelt.
3. **Fall $n = m$** Man erhält einen Weg, der die Länge $n + (k-1-m) + 1 = k$ besitzt. Auch hier tritt ein Widerspruch auf, da dieser Weg länger als der angenommene ist.

Da in jedem der auftretenden Fälle ein Widerspruch hergeleitet wurde, muss die Annahme, dass es zwei längste Wege ohne einen gemeinsamen Knoten gibt, falsch sein. Somit ist klar, dass zwei längste Wege in einem zusammenhängenden ungerichteten Graphen mindestens einen gemeinsamen Knoten besitzen. \square

4 Turnier-Champion

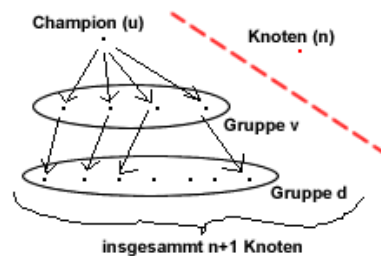
Der Beweis wird durch vollständige Induktion nach der Spieleranzahl n geführt.

Induktionsanfang: $n = 1$

Es existiert nur ein Knoten, folglich muss dieser der Champion sein.

Induktionsschritt: Es gelte, dass es bei n Spielern mindestens einen Champion in einem Turnier gibt, so soll auch gelten, dass es bei $n + 1$ Spielern mindestens einen Champion gibt.

Man betrachtet nun den Graphen mit $n + 1$ Knoten und trennt einen Knoten n ab, zusätzlich wird der Graph in Champion, Verlierer und Dominierte unterteilt. Laut der Induktionsvoraussetzung gibt es bei den n Knoten einen Champion (u), nun gibt es aber mehrere Möglichkeiten, wie dieser abgetrennte Knoten sich hierzu verhalten kann.



1. Fall: u schlägt n , hierbei würde u Champion bleiben.
2. Fall: n schlägt u und gleichzeitig schlägt mindestens ein Knoten aus Gruppe v n . Hierbei würde auch u Champion sein, da n über diesen Knoten aus v von u dominiert würde.
3. Fall: n schlägt u und alle aus der Gruppe v . In diesem Fall würde n ein Champion sein, da alle dominiert würden.

Es würde also in jedem der Fälle einen Champion geben. □

5 Minimum-Spanning-Tree

a) Es wird ein indirekter Beweis geführt.

Sei e schwerste Kante in C und gehöre diese Kante zum MST. Das heißt, dass e eine Kante sein muss, die den Graphen zusammenhält, so dass er noch zusammenhängend ist. Es ist aber bekannt, dass e zu einem Kreis gehört und somit mindestens noch eine weitere Kante existieren muss, die den Graphen zusammenhalten kann. Und da e die schwerste Kante ist und alle Kanten verschiedene Gewichte haben, kann ein leichter MST konstruiert werden. Dies ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass e Teil des MST ist und somit ist bewiesen, dass e zu keinem MST gehört.

b) Der Reverse-Delete-Algorithmus funktioniert, da er nur die schwersten Kanten entfernt, die den Graphen auseinander fallen lassen würden. Dies bedeutet, dass also nur Kanten gestrichen werden, die zu einem Kreis gehören, denn nur dort können mehr Kanten als notwendig sind, auftreten. Und wenn die schwersten Kanten der Reihe nach gestrichen werden, wird garantiert, dass alles, was übrig bleibt notwendig ist.

c)

Arbeitsweise von Kruskal: Als erstes werden die Kanten nach dem Gewicht aufsteigend sortiert:

- 1 ch
- 2 gs
- 3 gh
- 4 ah, as, hs
- 5 bc
- 6 ac
- 7 cd, dh, eg
- 8 ab
- 9 eh
- 11 fh
- 12 ce

Dann werden alle Kanten genommen, die nicht zu einem Kreis führen.

Die erste Kante, die zu einem Kreis führt, wäre die Kante *ah*, darum wird sie nicht mit in den MST reingenommen usw.

Arbeitsweise von Prim:

Arbeitsweise von Reverse-Delete: Als erstes werden die Kanten nach dem Gewicht absteigend sortiert:

- 12 ce
- 11 fh
- 9 eh
- 8 ab
- 7 cd, dh, eg
- 6 ac
- 5 bc
- 4 ah, as, hs
- 3 gh
- 2 gs
- 1 ch

Nun werden alle Kanten vom vollständigen Graphen nacheinander gestrichen, die nicht zu einem Auseinanderfallen des Graphen führen. Als erstes wird also die Kante *ce* gestrichen, Kante *gs* nicht, da sonst der Knoten f eine eigene Zusammenhangskomponente bilden würde, dann wird *eh* gestrichen usw.