

Mathematik für Informatiker I  
(Frank Hoffmann)

Abgabe am Mittwoch, den 08. November 2006 bis 13<sup>00</sup>

1. **DNF,KNF** (6 Punkte)

Finden Sie zu den folgenden Formeln semantisch äquivalente Terme in DNF bzw. KNF.

- (a)  $(p \Rightarrow (q \vee r)) \wedge \neg q \wedge \neg r$
- (b)  $\neg(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r$
- (c)  $\neg r \Rightarrow (((p \vee q) \Rightarrow r) \Rightarrow \neg q)$

2. **Vollständige Signaturen** (6 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass weder  $\{\wedge\}$ ,  $\{\vee\}$  noch  $\{\Rightarrow\}$  funktional vollständig sind.
- (b) Zeigen Sie, dass die Implikation  $\Rightarrow$  zusammen mit dem Term *false* funktional vollständig ist!
- (c) (Schwerer! 4 Zusatzpunkte) Zeigen Sie, dass  $\{\neg, \Leftrightarrow\}$  keine vollständige Signatur ist.  
Tipps:  $\Leftrightarrow$  ist kommutativ und assoziativ, zeigen! Damit dann gleiche Literale “gruppieren” und vereinfachen!

3. **Quantoren I** (4 Punkte)

Finden Sie für folgende quantifizierte Formeln jeweils ein Universum  $\mathcal{U}$  und Prädikate  $A$ ,  $B$  und  $P$ , so dass die Formel einmal wahr und einmal falsch ist.

- (a)  $\forall x \forall y (P(x, y) \Rightarrow P(y, x))$
- (b)  $\exists x (A(x) \wedge \forall y B(x, y))$

4. **Quantoren II** (2 Punkte)

Schreiben Sie eine quantifizierte Formel, die ausdrückt, dass wenigstens 4 verschiedene Elemente aus einem Grundbereich ein Prädikat  $P(x)$  erfüllen.

5. **Quantoren III** (2 Punkte)

Schreiben Sie die folgenden Formeln in Negationsnormalform, das heißt, die verwendeten Negationen beziehen sich nur auf atomare Teilformeln und es werden außer den Quantoren nur die Junktoren  $\neg, \vee, \wedge$  benutzt.

- (a)  $\neg \forall x \exists y (P(x, y) \wedge Q(x, y) \wedge R(x, y))$
- (b)  $\neg \forall x (\exists y (P(x, y) \Rightarrow Q(x, y)) \wedge \exists z R(x, z))$