

1 Binomischer Satz

a) Es soll der Binomische Satz $((a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k})$ per vollständiger Induktion bewiesen werden.

Induktionsanfang:

$$\begin{aligned} n &= 1 \\ (a+b)^1 &= \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^k b^{1-k} \\ &= \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 \\ &= a + b \quad \text{wahre Aussage} \end{aligned}$$

Induktionsschritt:

Es gelte $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, so soll auch $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$ gelten.

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b) * (a+b)^n = (a+b) * \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} \quad \square \end{aligned}$$

b) Es soll die Identität von $2^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} 3^{n-k}$ mit Hilfe des Binomischen Satzes bewiesen werden.

$$2^n = (-1 + 3)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 3^{n-k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} 3^{n-k} \quad \square$$

Für $n = 4$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} 2^4 &= \sum_{k=0}^4 (-1)^k \binom{4}{k} 3^{4-k} \\ &= (-1)^0 \binom{4}{0} 3^4 + (-1)^1 \binom{4}{1} 3^3 + (-1)^2 \binom{4}{2} 3^2 + (-1)^3 \binom{4}{3} 3^1 + (-1)^4 \binom{4}{4} 3^0 \\ &= 1 * 1 * 81 - 4 * 27 + 6 * 9 - 4 * 3 + 1 \\ &= 16 \end{aligned}$$

2 Identitäten

a) Es soll die Identität $\binom{2n}{2} = 2 * \binom{n}{2} + n^2$ bewiesen werden.

$$\begin{aligned} \binom{2n}{2} &= \binom{2n-1}{1} + \binom{2n-1}{2} = (2n-1) + \binom{2n-1}{2} \\ &= (2n-1) + \frac{(2n-1)!}{(2n-3)! * 2!} = (2n-1) + \frac{(2n-1)(2n-2)}{2} \\ &= (2n-1) + \frac{4n^2 - 4n - 2n + 2}{2} = (2n-1) + (2n^2 - 3n + 1) \\ &= 2n^2 - n = n^2 - n + n^2 = n(n-1) + n^2 \\ &= 2 * \frac{n!}{(n-2)! * 2!} + n^2 = 2 \binom{n}{2} + n^2 \quad \square \end{aligned}$$

b) Es soll $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ bewiesen werden.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \underbrace{\binom{n+n}{n}}_{\text{Vandermond'sche Identität}} = \binom{2n}{n} \quad \square$$

3 Abzählen I

Es sollen 90 Punkte auf 12 Fragen verteilt werden, so dass jede Frage mind. 4 Punkte erhält. Wie viele Punkteverteilungen sind möglich?

Dies entspräche einer geordneten Zahlpartition von $90 - 4 * 12 = 42$ auf 12 Summanden, da aber jeder Summand mind. 1 bei einer Zahlpartition betragen muss, muss eine Zahlpartition von $90 - 3 * 12 = 54$ berechnet werden.

$$\binom{53}{11} = 7,622 * 10^{10}$$

Es sind also $7,622 * 10^{10}$ verschiedene Verteilungen möglich.

4 Abzählen II

Wie viele Lösungen hat die Gleichung $x + y + z + w = 18$?

Dies entspricht einer ungeordneten Zahlpartition von 18 in 4 Summanden.

$$\begin{aligned}
 P_{18,4} &= P_{14+4,4} = \sum_{i=1}^4 P_{14,4} = P_{14,1} + P_{14,2} + P_{14,3} + P_{14,4} \\
 &= 1 + P_{12,1} + P_{12,2} + P_{11,1} + P_{11,2} + P_{11,3} + P_{10,1} + P_{10,2} + P_{10,3} + P_{10,4} \\
 &= 1 + 1 + P_{10,1} + P_{10,2} + 1 + P_{9,1} + P_{9,2} + P_{8,1} + P_{8,2} + P_{8,3} + 1 + P_{8,1} \\
 &\quad + P_{8,2} + P_{7,1} + P_{7,2} + P_{7,3} + P_{6,1} + P_{6,2} + P_{6,3} + P_{6,4} \\
 &= 4 + 1 + P_{8,1} + P_{8,2} + 1 + P_{7,1} + P_{7,2} + 2 * (1 + P_{6,1} + P_{6,2}) + P_{5,1} + P_{5,2} + P_{5,3} \\
 &\quad + 1 + P_{5,1} + P_{5,2} + P_{4,1} + P_{4,2} + P_{4,3} + 1 + P_{4,1} + P_{4,2} \\
 &\quad + P_{3,1} + P_{3,2} + P_{3,3} + P_{2,1} + P_{2,2} + P_{2,3} + P_{2,4} \\
 &= 10 + 1 + P_{6,1} + P_{6,2} + 1 + P_{5,1} + P_{5,2} + 2 * (1 + P_{4,1} + P_{4,2}) \\
 &\quad + 2 * (1 + P_{3,1} + P_{3,2}) + P_{2,1} + P_{2,2} + P_{2,3} + 2 * (1 + P_{2,1} + P_{2,2}) \\
 &\quad + P_{1,1} + P_{1,2} + P_{1,3} + 1 + P_{1,1} + P_{1,2} + 1 + 1 + 1 + 0 + 0 \\
 &= 22 + 1 + P_{4,1} + P_{4,2} + 1 + P_{3,1} + P_{3,2} + 2 * (1 + P_{2,1} + P_{2,2}) \\
 &\quad + 2 * (1 + P_{1,1} + P_{1,2}) + 1 + 1 + 0 + 2 * (1 + 1) + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 \\
 &= 36 + 1 + P_{2,1} + P_{2,2} + 1 + P_{1,1} + P_{1,2} + 2 * (1 + 1) + 2 * (1 + 0) \\
 &= 44 + 1 + 1 + 1 + 0 \\
 &= 47
 \end{aligned}$$

Es gibt also 47 Lösungen für die Gleichung.

5 Poker und Bridge

a) Es gibt in einem normalen Kartenspiel 13 Karten einer Farbe. Um 4 gleiche einer Farbe auszuwählen gibt es $\binom{13}{4}$ Möglichkeiten. Da aber von jeder der vier Farben man vier gleiche wählen kann vervierfacht sich die Anzahl der Möglichkeiten, also $4 * \binom{13}{4}$. Beim Pokerblatt hat man aber 5 Karten, wenn genau vier die gleiche Farbe haben sollen, bleiben noch $52 - 13 = 39$ restliche Karten übrig aus der die fünfte Karte gewählt werden kann.

$$4 * \binom{13}{4} * 39 = 111.540$$

Es gibt also 111.540 verschiedene Möglichkeiten, dass bei einem Pokerblatt genau vier Karten die selbe Farbe haben.

b) Um aus 4 gleichwertigen Karten, drei auszuwählen hat man $\binom{4}{3}$ Möglichkeiten, bei 2 Karten gleichen Wertes sind es dann $\binom{4}{2}$. Nun gibt es aber 13 verschiedene Werte, deshalb gilt $13 * \binom{4}{3}$. Wenn man nun schon drei Karten des gleichen Wertes gewählt hat, kann von diesem Wert nicht auch noch die zwei aus vier Karten kommen, daher ist dort der Faktor 12.

$$13 * \binom{4}{3} * 12 * \binom{4}{2} = 3.744$$

Es gibt also genau 3.744 Möglichkeiten für ein Full House.

c) Für den ersten Spieler gibt es noch $\binom{52}{13}$ Möglichkeiten, für den nächsten Spieler fehlen dann aber schon 13 Karten, also nur noch $\binom{39}{13}$ Möglichkeiten für ihn usw. Da man aber eine andere Ausgangssituation erhält, wenn die Spieler die Karten tauschen, vervierfacht sich die Anzahl der Möglichkeiten.

$$4 * \binom{52}{13} * \binom{39}{13} * \binom{26}{13} * \binom{13}{13} = 2,146 * 10^{29}$$

Es gibt also $2,146 * 10^{29}$ verschiedene Ausgangssituationen.