

Mathematik für Informatiker I  
(Frank Hoffmann)

Abgabe bis Mittwoch, den 07. Februar 2007 bis 13<sup>00</sup>

1. **Richtig oder falsch ?** (1 Punkt)

Es gibt einen ungerichteten Graphen (ohne Doppelkanten) mit 12 Knoten, 66 Kanten und 3 Zusammenhangskomponenten. Begründung!

2. **Graphen färben** (3 Punkte)

Beweisen Sie, dass man die Knoten eines ungerichteten Graphen mit Maximalgrad  $k$  so mit höchstens  $k + 1$  Farben färben kann, dass adjazente Knoten immer verschiedene Farben bekommen.

3. **Längste Wege** (3 Punkte)

Zeigen Sie mit einem indirekten Beweis, dass in einem zusammenhängenden ungerichteten Graphen je zwei längste Wege einen gemeinsamen Knoten haben.

4. **Turnier-Champion** (4 Punkte)

Ein Turnier auf  $n$  Knoten ist ein gerichteter Graph, der dadurch entsteht, dass man den ungerichteten Kanten des vollständigen Graphen  $K_n$  Richtungen zuweist. Wir interpretieren die Richtung  $v \rightarrow w$  als Spieler  $v$  schlägt Spieler  $w$ . Außerdem sagen wir, dass  $v$  den Spieler  $w$  dominiert, falls er ihn schlägt oder es einen Spieler  $z$  gibt, so dass  $v \rightarrow z$  und  $z \rightarrow w$  Kanten im Turnier sind. Ein Spieler heißt Champion, falls er jeden anderen Spieler dominiert.

Beweisen Sie, dass jedes Turnier mit  $n \geq 1$  Spielern wenigstens einen Champion

5. **Minimum Spanning Tree** (3+3+3 Punkte)

Sei  $G = (V, E)$  ein zusammenhängender ungerichteter Graph mit einer Gewichtsfunktion  $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

- (a) Angenommen, alle Kantengewichte sind verschieden und sei  $C$  ein Kreis in  $G$ . Zeigen Sie, dass die schwerste Kante  $e$  in  $C$  zu keinem MST von  $G$  gehört. Tipp: Es bietet sich ein indirekter Beweis an.
- (b) Argumentieren Sie, dass der folgende Reverse-Delete-Algorithmus einen MST produziert. Wir sortieren die Kanten nach absteigendem(!) Gewicht. In dieser Reihenfolge werden die Kanten aus dem Graphen  $G$  gestrichen, falls so eine Delete-Operation den Graphen nicht unzusammenhängend macht.
- (c) Demonstrieren Sie die Arbeitsweise von Prim's (Start in  $s$ ), Kruskals und dem Reverse-Delete-Algorithmus anhand des folgenden Graphen.

