

1 Rekursion I

Um die Rekursionsgleichung zu bestimmen, stellt man folgende Überlegungen an:

1. Die Position der ersten Zahl ist dieselbe wie in der Standardanordnung -> Dies entspricht der Anzahl von Anordnungen von $n - 1$ Zahlen.
2. Position von erster und zweiter Zahl sind vertauscht -> Dies entspricht der Anzahl von Anordnungen von $n - 2$ Zahlen

Die Rekursionsgleichung für die Anzahl der Belegungen lautet demnach

$$a(n) = a(n) + a(n - 2)$$

mit $a(1) = 1$

$$a(2) = 2$$

Wie lautet die geschlossene Formel?

Annahme: $a(n) = cx^n$, daraus folgt

$$cx^n = cx^{n-1} + cx^{n-2} \quad | : cx^{n-2}$$

$$x^2 = x + 1$$

$$0 = x^2 - x - 1$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Es gibt für A_n also zwei Lösungen:

$$a(n) = c_1 * \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \text{und}$$

$$a(n) = c_2 * \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Da Linearkombinationen von gültigen Lösungen auch wieder Lösungen ergeben, ist folgendes auch eine Lösung:

$$a(n) = c_1 * \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 * \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Mit Hilfe der Randbedingungen kann ein lineares Gleichungssystem aufgestellt werden, mit dem c_1 und c_2 berechnet werden

$$\begin{aligned} a(1) = 1 &= c_1 * \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 + c_2 * \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 \\ a(2) = 2 &= c_1 * \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 + c_2 * \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

Als Lösungen ergeben sich:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}} \\ c_2 &= \frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} \end{aligned}$$

Die geschlossene Formel lautet also

$$A_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}} * \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{3 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} * \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

2 Rekursion II

Auf die Rekursionsgleichung für die Anzahl der Strings kommt man wie folgt:

1. Der String der Länge n beginnt mit einer 1 oder einer 2 -> entspricht der Anzahl von Strings mit der Länge $n - 1$
2. Der String der Länge n beginnt mit einer 0 -> es muss eine 1 oder eine 2 folgen -> entspricht der Anzahl von Strings mit der Länge $n - 2$.

Es ergibt sich also:

$$s(n) = 2s(n - 1) + 2s(n - 2) = 2(s(n - 1) + s(n - 2))$$

Man nimmt an, dass die geschlossene Form $s(n) = c * x^n$ lautet. Damit ergibt sich

$$c * x^n = 2 * (c * x^{n-1} + c * x^{n-2}) \quad | : c * x^{n-2}$$

$$x^2 = 2 * (x + 1)$$

$$0 = x^2 - 2x - 2$$

$$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{(-1)^2 + 2}$$

$$x_1 = 1 + \sqrt{3}$$

$$x_2 = 1 - \sqrt{3}$$

Da die Linearkombinationen von Lösungen wieder eine richtige Lösung ergeben, kann folgendes angenommen werden:

$$s(n) = c_1 * (1 + \sqrt{3})^n + c_2 * (1 - \sqrt{3})^n$$

Mit Hilfe der Randbedingungen ergibt sich ein lineares Gleichungssystem:

$$\text{I. } s(1) = 3 = c_1 * (1 + \sqrt{3})^1 + c_2 * (1 - \sqrt{3})^1$$

$$\text{II. } s(2) = 8 = c_1 * (1 + \sqrt{3})^2 + c_2 * (1 - \sqrt{3})^2$$

$$\text{aus I. } c_1 = \frac{3 - c_2(1 - \sqrt{3})}{1 + \sqrt{3}}$$

$$\text{in II. } 8 = \frac{3 - c_2(1 - \sqrt{3})}{1 + \sqrt{3}} * (1 + \sqrt{3})^2 + c_2 * (1 - \sqrt{3})^2$$

$$8 = 3 * (1 + \sqrt{3}) - c_2(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}) + c_2(1 - 2\sqrt{3} + 3)$$

$$8 = 3 + 3\sqrt{3} - c_2(1 - 3) + c_2(4 - 2\sqrt{3})$$

$$8 = 3 + 3\sqrt{3} - c_2 * (6 - 2\sqrt{3})$$

$$c_2 = \frac{5 - 3\sqrt{3}}{6 - 2\sqrt{3}}$$

$$c_1 = \frac{3 - \left(\frac{5-3\sqrt{3}}{6-2\sqrt{3}}\right)(1 - \sqrt{3})}{1 + \sqrt{3}}$$

$$c_1 = \frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

Mit diesen Werten von c_1 und c_2 ergibt sich als geschlossene Formel

$$s(n) = \frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} * (1 + \sqrt{3})^n + \frac{5 - 3\sqrt{3}}{6 - 2\sqrt{3}} * (1 - \sqrt{3})^n$$

3 Rekursion III

Gährende Leere, weil Rekursionsgleichung nicht so ganz gecheckt ...

4 Rekursion IV

Es ist folgende inhomogene Rekursionsgleichung gegeben.

$$f(n) = 2f(n-1) + n + 5$$

$$f(0) = 4$$

Bei einer inhomogenen Rekursionsgleichung wird zuerst eine Lösung für den homogenen Anteil berechnet ($f'(n) = 2f'(n-1)$):

Auch hier geht man davon aus, dass $f'(n) = cx^n$, also

$$cx^n = 2cx^{n-1} \quad | : cx^{n-1}$$

$$x = 2$$

$$\Rightarrow f'(n) = c * 2^n$$

Als nächster Schritt wird eine spezielle Lösung für die inhomogene Rekursion geraten; und zwar $f''(n) = an + b$

$$an + b = 2(a(n-1) + b) + n + 5$$

$$an + b = 2an - 2a + 2b + n + 5$$

$$0 = n(a+1) - 2a + b + 5$$

Diese Gleichung wird nur dann wahr, wenn die Summanden jeweils 0 sind, also folgt

$$0 = n(a+1)$$

$$\Rightarrow a = -1$$

$$0 = -2a + b + 5$$

$$0 = 7 + b$$

$$\Rightarrow b = -7$$

$$\Rightarrow f''(n) = -2n + 2 - 14 + n + 5 = -n - 7$$

Um nun die endgültige geschlossene Formel zu erhalten, müssen die Lösung des homogenen Teils und die spezielle Lösung addiert werden.

$$f(n) = f'(n) + f''(n)$$

$$f(n) = c * 2^n - n - 7$$

Mit der Randbedingung kann c bestimmt werden:

$$f(0) = 4 = c * 2^0 - 0 - 7$$
$$c = 11$$

Die geschlossene Formel lautet also

$$f(n) = 11 * 2^n - n - 7$$

5 Isomorphe Graphen

siehe Anhang