

2 Briefmarken

Vermutung: Es können alle Beträge ≥ 20 mit 7, 8 und 10 Cent Briefmarken frankiert werden, d.h. $7k + 8l + 10m = n$, $n \geq 20$

Der Beweis wird über vollständige Induktion geführt.

Induktionsanfang:

$n = 20$	$20 = 2 \cdot 10$
$n = 21$	$21 = 3 \cdot 7$
$n = 22$	$22 = 2 \cdot 7 + 8$
$n = 23$	$23 = 2 \cdot 8 + 7$
$n = 24$	$24 = 3 \cdot 8$
$n = 25$	$25 = 7 + 8 + 10$
$n = 26$	$26 = 2 \cdot 8 + 10$ wahre Aussage

Induktionsschritt:

Es gelte $7k + 8l + 10m = n$, $7k_1 + 8l_1 + 10m_1 = n + 1$, $7k_2 + 8l_2 + 10m_2 = n + 2$, $7k_3 + 8l_3 + 10m_3 = n + 3$, $7k_4 + 8l_4 + 10m_4 = n + 4$, $7k_5 + 8l_5 + 10m_5 = n + 5$ und $7k_6 + 8l_6 + 10m_6 = n + 6$, so soll auch $7k_7 + 8l_7 + 10m_7 = n + 7$ gelten.

$n + 7$ ist in dieser Weise darstellbar, wenn $(n + 7) - 7$ darstellbar ist. n ist aber nach Voraussetzung in dieser Weise darstellbar, also auch $n + 7$. \square

3 Vollständige Induktion I

Es ist per vollständiger Induktion zu beweisen, dass die Hälfte aller Bitstrings der Länge n ($(0, 1)^n$) eine gerade Anzahl von Einsen aufweist.

Es existieren genau 2^n Bitstrings der Länge n , es sollen also genau $\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$ Bitstrings eine gerade Anzahl von Einsen haben.

Induktionsanfang:

$$n = 1 \quad (0, 1)^1$$

entweder (1) oder (0), daher wahre Aussage

Induktionsschritt:

Es gelte $|(0, 1)^n| = \frac{2^n}{2}$, so soll auch $|(0, 1)^{n+1}| = \frac{2^{n+1}}{2}$ gelten.

$$|(0, 1)^{n+1}| = |((0, 1)^n, (0, 1))|$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

$$(i) \quad |(0, 1)^{n+1}| = \underbrace{|((0, 1)^n, 0)|}_{\text{gerade Anzahl von 1en, da } (0, 1)^n \text{ nach Vorauss. gilt, 0 ändert nix}}$$

$$(ii) \quad |(0, 1)^{n+1}| = \underbrace{|((0, 1)^n, 1)|}_{\text{Hälfte, die bei } (0, 1)^n \text{ gerade, nun ungerade Anzahl, Hälfte, die ungerade Anzahl bei } (0, 1)^n, \text{ hat nun gerade Anzahl von 1en}} \quad \square$$

4 Vollständige Induktion II

Nach folgendem Algorithmus soll herausgefunden werden, ob b ein Glied der Folge $s_n = a_1, a_2, a_3 \dots, a_{2^n}$ ist, oder nicht:

1. Folge der Länge 2^n wird halbiert in zwei gleichgroße Teilfolgen (Länge der Teilfolgen 2^{n-1})
2. $a_{2^{n-1}}$ wird mit b verglichen. Ist $b \leq a_{2^{n-1}}$, dann wird links weitergesucht, ansonsten rechts (nach selbem Schema).
3. Ist Teilfolge nun noch 1-elementig, wird $a_i = b$ überprüft.

Es ist nun per vollständiger Induktion zu beweisen, dass maximal durch $n+1$ Abfragen herausgefunden wird, ob b zur Folge gehört.

Induktionsanfang:

$$n = 1 \Rightarrow s_1 = a_1, a_2$$

Teilen $a_1 \mid a_2$ und erster Vergleich: $a_1 \stackrel{?}{=} b$ hier sind wir fertig, wahre Aussage

Induktionsschritt:

b soll in $n+1$ Schritten in $s_n = a_1, a_2, a_3 \dots, a_{2^n}$ gesucht werden. So soll auch b in $n+2$ Schritten in $s_{n+1} = a_1, a_2, a_3 \dots, a_{2^{n+1}}$ gesucht werden können.

s_{n+1} wird im ersten Schritt halbiert, also nach dem Algorithmus in zwei 2^n lange Teilfolgen zerlegt, beim ersten Vergleich wird entschieden, ob links oder rechts gesucht wird. In diesen Teilfolgen wird b aber nach Voraussetzung in maximal $n+1$ Schritten gefunden. Also haben wir $1 + n + 1 = n + 2$ Vergleiche. \square

5 Vollständige Induktion III

Es ist per vollständiger Induktion über den Formelrang zu beweisen, dass jeder Booleschen Term semantisch äquivalent in DNF geschrieben werden kann.

Induktionsanfang:

$rg(t) = 1 \Rightarrow t = x$, also $t = 1 \equiv x$ oder $t = 0 \equiv \neg x$ wahre Aussage

Induktionsschritt:

Es existiere für t_n mit $rg(t_n) = n$ eine DNF, so soll auch für t_{n+1} mit $rg(t_{n+1}) = n+1$ eine DNF existieren.

Man unterscheidet drei auftretende Fälle:

(i) $t_{n+1} \equiv x_1 \vee x_2$, damit ist $rg(x_1) \leq n$, $rg(x_2) \leq n$ und somit besitzen beide nach Annahme DNF. $dnf(x_1) = x'_1$, $dnf(x_2) = x'_2$. Damit ist $t_{n+1} \equiv x'_1 \vee x'_2$. Dies ist DNF nach Definition einer DNF.

(ii) $t_{n+1} \equiv x_1 \wedge x_2$, damit ist $rg(x_1) \leq n$, $rg(x_2) \leq n$ und somit besitzen beide nach Annahme DNF. $dnf(x_1) = x'_1$, $dnf(x_2) = x'_2$.
Damit ist $t_{n+1} \equiv x'_1 \wedge x'_2 \equiv \neg(x'_1 \vee x'_2)$, dies ist eine DNF nach Definition.

(iii) $t_{n+1} \equiv \neg x$, damit ist $rg(x) = n$ und somit besitzt x nach Annahme DNF. $dnf(x) = x'$. Damit ist $t_{n+1} \equiv \neg x'$, dies ist eine DNF nach Definition. \square

6 Abzählen I

Es ist die Anzahl der ganzen Zahlen aus $U = \{1, 2, \dots, 250\}$, die weder durch 3 noch 5 teilbar, aber durch 7 teilbar sind, zu bestimmen.

Hierfür definieren wir drei Teilmengen, für die folgendes gilt:

$$T_3 = \{u \in U \mid 3|u\}$$

$$T_5 = \{u \in U \mid 5|u\}$$

$$T_7 = \{u \in U \mid 7|u\}$$

Die gesuchte Anzahl kann nun als $|\overline{T_3} \cap \overline{T_5} \cap T_7|$ berechnet werden. Durch anwenden von De Morgan erhalten wir $|U| - |T_3 \cup T_5 \cup \overline{T_7}|$, was mit Hilfe des Inklusion-Exklusion-Prinzips berechnet werden kann.

$$\begin{aligned} |T_3 \cup T_5 \cup \overline{T_7}| &= |T_3| + |T_5| + |\overline{T_7}| - (|T_3 \cap T_5| + |T_3 \cap \overline{T_7}| + |T_5 \cap \overline{T_7}|) + |T_3 \cap T_5 \cap \overline{T_7}| \\ |T_3 \cup T_5 \cup \overline{T_7}| &= |T_3| + |T_5| + (|U| - |T_7|) \\ &\quad - (|T_3 \cap T_5| + (|T_3| - |T_3 \cap T_7|) + (|T_5| - |T_5 \cap T_7|)) + (|T_3 \cap T_5| - |T_3 \cap T_5 \cap T_7|) \\ |T_3 \cup T_5 \cup \overline{T_7}| &= \left\lfloor \frac{250}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{250}{5} \right\rfloor + \left(250 - \left\lfloor \frac{250}{7} \right\rfloor \right) \\ &\quad - \left[\left\lfloor \frac{250}{15} \right\rfloor + \left(\left\lfloor \frac{250}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{250}{21} \right\rfloor \right) + \left(\left\lfloor \frac{250}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{250}{35} \right\rfloor \right) \right] + \left(\left\lfloor \frac{250}{15} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{250}{157} \right\rfloor \right) \\ |T_3 \cup T_5 \cup \overline{T_7}| &= 83 + 50 + 215 - (16 + 72 + 43) + 14 \\ |T_3 \cup T_5 \cup \overline{T_7}| &= 231 \end{aligned}$$

Nach $|\overline{T_3} \cap \overline{T_5} \cap T_7| = |U| - |T_3 \cup T_5 \cup \overline{T_7}|$ folgt $|\overline{T_3} \cap \overline{T_5} \cap T_7| = 250 - 231 = 19$.

Es sind also genau 19 Zahlen der Menge U weder durch 3 noch durch 5, aber durch 7 teilbar.

7 Abzählen II

a) 12 Personen sollen so auf einer Bank angeordnet werden, dass zwei bestimmte nicht nebeneinander sitzen. Wie viele solche Anordnungen gibt es? Die Anzahl entspricht der Gesamtmöglichkeiten 12 Personen auf einer Bank anzuordnen minus der Anzahl, wo diese zwei bestimmten nebeneinander sitzen (sozusagen das Komplement). Die Gesamtanzahl an Möglichkeiten entspricht $12!$, da 12 mögliche Personen für den ersten Platz in Frage kommen, dann nur noch 11 für den zweiten, 10 für den dritten usw.

Wenn zwei Personen unbedingt nebeneinander sitzen sollen, dann können diese beiden quasi als eine Person aufgefasst werden, die Anzahl an Möglichkeiten wo diese nebeneinander sitzen entspricht also $11!$, dies ist aber noch nicht ganz richtig, da Person 1 entweder links oder rechts sitzen kann, also $2 * 11!$.

Insgesamt ergeben sich $12! - 2 * 11! \approx 3,99 * 10^8$ mögliche Anordnungen.

b) An einen runden Tisch sollen abwechselnd n Männer und n Frauen gesetzt werden. Wie viele Anordnungen gibt es?

Als erstes werden die n Frauen auf n Plätze verteilt, wie in Aufgabe 4a) ergibt sich hier $n!$ als Anzahl. Es sind allerdings nur $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ Anordnungen relevant, da es sich um einen runden Tisch handelt und jeweils n Anordnungen derselben entsprechen (hier ändert sich nämlich nicht der Nachbar). Nun werden die n Männer auf die verbleibenden n Plätze gewiesen, hierbei gilt wieder $n!$. In diesem Fall muss auch nichts mehr abgezogen werden, da dies schon bei den Frauen berücksichtigt wurde.

Insgesamt ergibt sich eine Anzahl von $(n-1)! * n!$.