

## 1 Logik im Alltag

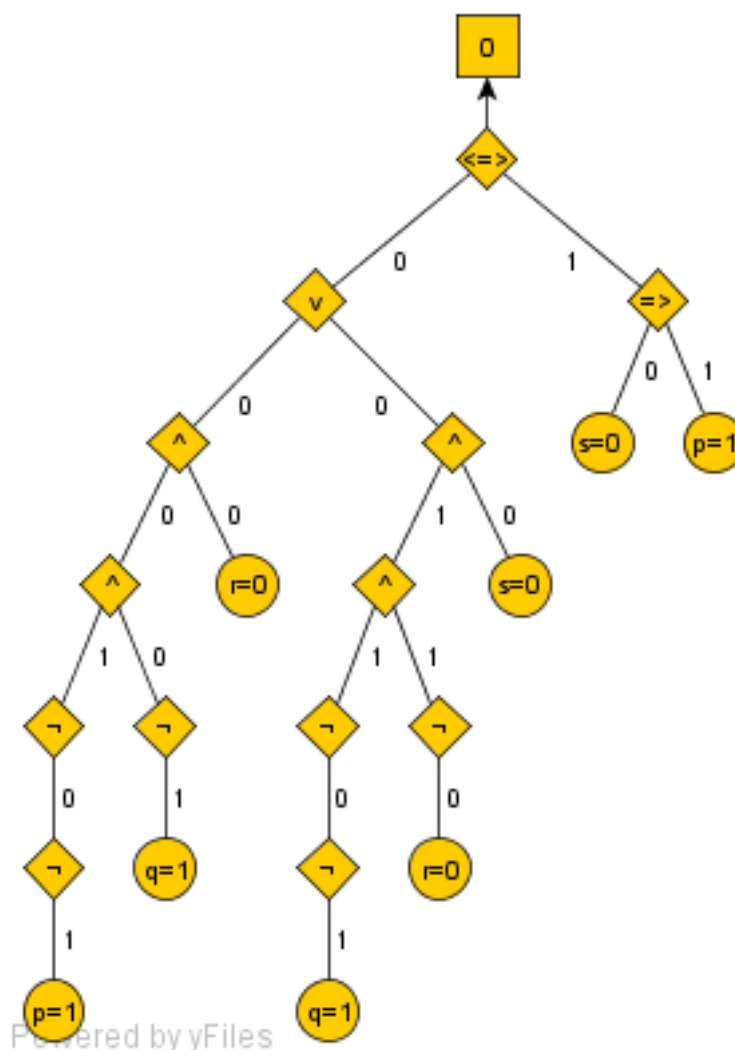
$t_1 = \text{«Gutes Essen ist nicht billig»}$ ,  $t_2 = \text{«Billiges Essen ist nicht gut»}$

$a = \text{«Essen ist gut»}$ ,  $b = \text{«Essen ist billig»}$

$$\begin{aligned}
 t_1 &= a \Rightarrow (\neg b) \\
 &\equiv (\neg a) \vee (\neg b) \\
 &\equiv (\neg b) \vee (\neg a) && | \text{Kommutativgesetz} \\
 &\equiv b \Rightarrow (\neg a) \\
 &\equiv t_2
 \end{aligned}$$

Durch die semantische Äquivalenz der Aussagen ist gezeigt, dass diese beiden dasselbe meinen.

## 2 Baumdarstellung, bottom-up Auswertung



Für  $p=q=1$  und  $r=s=0$  wird der Term zu 0 ausgewertet.

### 3 Tautologie

a)

$p$	$q$	$r$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \Leftrightarrow r$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Laut der Wertetabelle ist der Term  $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$  keine Tautologie.

b)

$p$	$q$	$r$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Laut der Wertetabelle ist der Term  $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$  eine Tautologie.

c)

$p$	$q$	$r$	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow r] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$
0	0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Laut der Wertetabelle ist der Term  $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow r] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$  eine Tautologie.

d)

$p$	$q$	$r$	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$	$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow q] \Rightarrow p$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Laut der Wertetabelle ist der Term  $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow q] \Rightarrow p$  keine Tautologie.

#### 4 Boolesche Gesetze

a)

$$\begin{aligned}
 & (x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y) & | & \text{Distributivgesetz} \\
 & \equiv x \wedge (y \vee \neg y) \vee (\neg x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y) & | & \text{Distributivgesetz} \\
 & \equiv x \wedge (y \vee \neg y) \vee \neg x \wedge (y \vee \neg y) & | & \text{Kommutativgesetz} \\
 & \equiv (y \vee \neg y) \wedge x \vee \neg x \wedge (y \vee \neg y) & | & \text{Kommutativgesetz} \\
 & \equiv (y \vee \neg y) \wedge x \vee (y \vee \neg y) \wedge \neg x & | & \text{Distributivgesetz} \\
 & \equiv (y \vee \neg y) \wedge (x \vee \neg x) \\
 & \equiv \text{true} \wedge \text{true} \\
 & \equiv \text{true}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 & (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) & | & \text{Distributivgesetz} \\
 & \equiv (x \wedge ((y \wedge \neg z) \vee (\neg y \wedge z))) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) & | & \text{Distributivgesetz} \\
 & \equiv (x \wedge [(y \wedge \neg z) \vee (\neg y \wedge z)]) \vee (\neg y \wedge \neg z) & | & \text{Assoziativgesetz} \\
 & \equiv x \wedge [(y \wedge \neg z) \vee (\neg y \wedge z) \vee (\neg y \wedge \neg z)] & | & \text{Distributivgesetz} \\
 & \equiv x \wedge [(y \wedge \neg z) \vee (\neg y \wedge (z \vee \neg z))] \\
 & \equiv x \wedge [(y \wedge \neg z) \vee (\neg y \wedge \text{true})] \\
 & \equiv x \wedge [(y \wedge \neg z) \vee \neg y]
 \end{aligned}$$

## 5 Boolesche Funktionen

Es ist zu zeigen, dass

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_i \wedge f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, \dots, x_n) \vee \neg x_i \wedge f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, \dots, x_n)$$

für alle  $x_i$  mit  $1 \leq i \leq n$  gilt.

Hierzu müssen zwei Fälle untersucht werden, nämlich  $x_i = 0$  und  $x_i = 1$

**1. Fall**  $x_i = 0$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \underbrace{0 \wedge f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, \dots, x_n)}_{\text{wird zu 0 ausgewertet}} \vee 1 \wedge f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, \dots, x_n)$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0 \vee \underbrace{1 \wedge f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, \dots, x_n)}_{\text{entscheidet über Auswertung des Gesamtausdrucks}}$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = 1 \wedge \underbrace{f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, \dots, x_n)}_{\text{entscheidet über Auswertung des Gesamtausdrucks}}$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, \dots, x_n) \quad \text{q.e.d.}$$

**2. Fall**  $x_i = 1$

$$f(x_1, \dots, x_n) = 1 \wedge f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, \dots, x_n) \vee \underbrace{0 \wedge f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, \dots, x_n)}_{\text{wird zu 0 ausgewertet}}$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \underbrace{1 \wedge f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, \dots, x_n)}_{\text{entscheidet über Auswertung des Gesamtausdrucks}} \vee 0$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = 1 \wedge \underbrace{f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, \dots, x_n)}_{\text{entscheidet über Auswertung des Gesamtausdrucks}}$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, \dots, x_n) \quad \text{q.e.d.}$$

Für beide Fälle ist die Gleichheit gegeben.

## 6 Antivalenz und Sheffer-Strich

a) Untersuchung zum Sheffer-Strich:

$p$	$q$	$r$	$p q$	$q p$	$q r$	$p (q r)$	$(p q) r$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1	1

Aus der vierten und fünften Spalte kann abgelesen werden, dass der Sheffer-Strich kommutativ ist, da diese beiden Spalten für die gleichen Belegungen das selbe Bild liefern. Er ist allerdings nicht assoziativ, was aus den Spalten sieben und acht hervorgeht.

b) Untersuchung zur Antivalenz:

$p$	$q$	$r$	$p \oplus q$	$q \oplus p$	$q \oplus r$	$p \oplus (q \oplus r)$	$(p \oplus q) \oplus r$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1	1

Aus der vierten und fünften Spalte kann abgelesen werden, dass die Antivalenz kommutativ ist, da diese beiden Spalten für die gleichen Belegungen das selbe Bild liefern. Genauso kann in Spalte sieben und acht abgelesen werden, dass die Antivalenz assoziativ ist.