1 Aufbau des Zahlensystems

Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$ -> Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$ -> Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$ -> Reelle Zahlen $\mathbb{R}$ -> Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

1.1 Natürliche Zahlen

Peamosche Axiome:

1. 0 ist natrürliche Zahl
2. Jede natürliche Zahl n hat einen Nachfolger $S(n)$
3. Aus $S(n) = S(m)$ folgt $n = m$
4. 0 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl
5. Jede Menge X, die die 0 und mit jeder natürlichen Zahl den Nachfolger enthält, umfasst ganz $\mathbb{N}$ (dies ermöglicht vollständige Induktion!)

Addition / Multiplikation rekursiv

$$\begin{aligned} n + 0 &= n \\ n + S(m) &= S(n + m) \\ n * 0 &= 0 \\ n * S(m) &= n * m + n \end{aligned}$$

Diese Operationen sind assoziativ und kommutativ. Das neutrale Element ist 0 (für Addition) und 1 (für Multiplikation).

1.2 Ganze Zahlen

Gleichung der Form $n + x = m$ bisher $n \leq m$. (gilt innerhalb von $\mathbb{N}$
$\rightarrow$ Einführung eines formalen Additionskehrwertes (-n)
$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{(-n) | n > 0, n \in \mathbb{N}\}$

Addition:

$$\begin{aligned} n + (-m) &= n - m \text{ für n kleiner gleich m} \\ &- (m - n) \text{ für n > m} \end{aligned}$$

$(\mathbb{Z}, +)$ ist Gruppe!
$(G, *)$ mit $* : G \times G \rightarrow G$ heißt Gruppe

1. $\forall g_1, g_2, g_3 \in G : (g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$
2. $\exists e \in G \forall g \in G : e * g = g * e = g$ (neutrales Element)
3. $\forall g \in G \exists \overline{g} \in G : g * \overline{g} = \overline{g} * g = e$ (inverses Element)

Definition: Gruppe $(G, *)$ ist kommutativ, falls $\forall g_1, g_2 \in G : g_1 * g_2 = g_2 * g_1$

Elementaare Gruppeneigenschaften

1. Neutrales Element ist eindeutig
2. Das inverse Elemten $\overline{g}$ zu g ist eindeutig
3. Kürzungsregeln:

$$g_1 * g = g_2 * g \Rightarrow g_1 = g_2$$
$$g * g_1 = g * g_2 \Rightarrow g_1 = g_2$$

4. Gleichungen der Form $g_1 * x = g_2$ haben eindeutige Lösung $x = \overline{g_1} * g_2$

Halbgruppe: $(F, *)$ mit $* : G \times G \to G$ und $*$ assoziativ heißt Halbgruppe.

Monoid: Halbgruppe und zusätzlich neutrales Element bezüglich $*$.

Ring:
Definition: $(R, +, *)$ mit $+, * : RxR \to R$
R1 (R,+) ist kommutative Gruppe
R2 (R,*) ist Halbgruppe R3 $\forall a, b, c \in R : a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$ und $(b + c) * a = (*b * a) + (c * a)$

1.3 Erweiterung der Ganzen Zahlen zu rationalen Zahlen

1. Definiere "Bruch" als Element aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$
2. Definiere "Gleichheit" zweier Brüche $(a, b) \sim (a', b')$ genau dann wenn $ab' = ba'$.
   ist Äquivalenzrelation, d.h. reflexiv, symmetrisch und transitiv.
   $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{N} / \sim$
   $(a, b)_\sim * (c, d)_\sim = (a * c, b * d)_\sim$ Multiplikation über $\mathbb{Z}$
   $(a, b)_\sim * (c, d)_\sim = (a * d + c * b, b * d)_\sim$ Addition über $\mathbb{Z}$

1 Wiederholung

Die Erweiterung der natürlichen Zahlen auf die ganzen und dann rationalen Zahlen ist ein Beispiel für die Faktorisierung:
A Menge und $R \subset A \times A$ Äquivalenzrelation.
R induziert eine Partition von A.

- bilden neue Menge A/R deren Elemente sind die Äquivalenzklassen
- definiere Operationen mit festgelegten Operatioren auf A
- "Wohldefiniertheit"

$\mathbb{Q}$ mit Multiplikation und Addition bilden einen Körper.

Definition 1 (K, +, *). *heißt Körper, falls*

(K1) *(K, +) kommutative Gruppe und 0 sei neutrales Element*

(K2) *(K$\backslash\{0\}$, *) ist kommutative Gruppe*

(K3) *Distributivität,* $\forall a, b, c \in K : a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$

Hinweis: Gleichung der Form $a * x + b = c$ ist in K immer lösbar für $a = 0$!

2 Von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{R}$

Motivation: Exponentation
in $\mathbb{Q}$:

$$a^0 = 1$$
$$a^{n+1} = a^n * a$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Gesetze: $a^{n+m} = a^n * a^m$, $(a * b)^n = a^n * b^n$ und $(a^n)^m = a^{n*m}$
Was ist mit $a^{\frac{1}{2}}$?
Das sollte gehen: $a^{\frac{1}{2}} * a^{\frac{1}{2}} = a^1 = a \Rightarrow a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

Satz 1 (Euklid). *$\sqrt{2}$ ist nicht rational.*

Beweis 1 (Widerspruch). *Angenommen $\sqrt{2}$ ist rational, dann müsste $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow 2 * q^2 = p^2$. p und q werden in ihre Primfaktoren zerlegt. Hierbei tritt der Widerspruch auf, da durch das Quadrieren auf beidenn Seite eine gerade Anzahl von 2en steht. Links ist jedoch noch eine mehr, es kann also sich nicht um eine Gleichheit handeln!!* $\square$

Eine reelle Zahl entspricht einem Punkt auf dem Zahlengerade.

- Fallt in immer feinere Intervalle
- reelle Zehl = unendlicher Dezimalbruch

etwas formaler: Cauchy-Folge von rationalen Zahlen $(x_i)i \in N, n_i \in \mathbb{Q}$
d.h. $\forall \epsilon > 0 \exists N \forall m, n > N : |x_m - x_n| < \epsilon$

Definition 2. *Äquivalenz zwischen Cauchy-Folgen:*

$$(x_i)_{i \in \mathbb{N}} = (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow (x_i - y_i)_{i \in \mathbb{N}} \to 0$$

Definition 3. *Eine positive reelle Zahl ist ein unendlicher Dezimalbruch der Form $z, z_1 z_2 ...$ mit $z \in N, z_i \in \{0, \ldots, 9\}$. Wichtig, der Bruch darf nicht auf $\overline{9}$ enden!*

Satz 2. *Eine reelle Zahl ist ferner dann rational, wenn ihre Dezimaldarstellung periodisch endet.*

Beweis 2. *Satz 2*

(⇒) $r = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$ $q > 0$ *Rechnerisch z.B.* $\frac{5}{7} = 5 : 7 = 0,\overline{714285}$

(⇐) *Komisches verschieben von Dezimalstellen und anschließende Subtraktion ...*

1 Ein anderer Blickwinkel auf die reellen Zahlen

Man betrachtet Nullstellen von ganzzahligen Polynomen.
Ein Polynom ist folgendes: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$

Definition 1 (komplexe Zahl). *Eine komplexe Zahl heißt algebraisch, wenn sie Nullstelle eines ganzzahligen Polynoms ist.*

Beispiel

1. Jede rationale Zahl ist algebraisch.

   $$a = \frac{p}{q}, \qquad q \neq 0$$

   Polynom: $qx - p = 0$

2. $\sqrt{2}$ ist algebrisch, da $x^2 - 2 = 0$.

3. $\sqrt{-1}$ ist algebraisch, da $x^2 - 1 = 0$

4. Nicht alle reellen Zahlen sind algebraisch!
   Diese nichtalgebraischen Zahlen werden auch transzendente Zahlen genannt. π und e sind z.B. transzendente Zahlen.

Es gilt:

1. Die Menge der algebraischen Zahlen ist abzählbar!
   Warum ist das so? Sie sind Lösung von Polynomen und Polynome sind abzählbar, da es nur eine begrenzte Anzahl von ihnen gibt.

2. Die Menge aller reellen Zahlen ist überabzählbar. (siehe Cantors Diagonalisierungsbeweis aus MAFI 1)
   Also gibt es überabzählbare viele nichtalgebraische reelle Zahlen.

$\mathbb{Q}$	$\subset$	$\ldots$	$\subset$	algebraische Zahlen
Körper		Galois-Theorie		Körper und dieser ist abgeschlossen gegenüber der Nullstelle von Polynom mit algebraischem Koeffiziernten

2 Reelle Zahlen

Körper, Ordnungs- und Vollständigkeitseigenschaft.

Definition 2 (Ordnung). $u, v \in \mathbb{R}$ *mit* $u, v > 0$.

$$u = u_0, u_1 u_2 \dots \qquad u_0, v_0 \in \mathbb{N}$$
$$v = v_0, v_1 v_2 \dots \qquad u_i, v_i \in \{0, \dots 9\}$$
$$u < v \Leftrightarrow \exists i : u_i < v_i \wedge \forall 0 \leq j \leq i-1 : u_j = v_j$$

und kanonische Erweiterung auf negativen reellen Zahlen.

Fakt Zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen liegt eine rationale Zahl!

Beweis 1. $r, r' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ *ohne Beschränkung der Allgemeinheit* $r < r'$.

$$r = r_0, r_1 r_2 \dots$$
$$r' = r'_0, r'_1 r'_2 \dots$$

Beide enden nicht auf $\overline{9}$
Sei i *erster Index mit* $r_i < r'_i$ *und sei* j *erster Index* $> i$ *mit* $r_j \neq 9$

$$r < r_o, r_1 \dots r_i(r_j + 1) < r' \qquad \square$$

$\leq$ ist lineare (totale) Ordnung auf den reellen Zahlen.

Definition 3. *Sei* $(M, \leq)$ *lineare Ordnung und sei* $C \subseteq M$.

- x *ist obere Schranke für* C: $\forall c \in C : c \leq x$
- x *ist untere Schranke für* C : $\forall c \in C : c \geq x$
- $x \in M$ *ist Maximum von* C: x *ist obere Schranke und* $x \in C$
- $x \in M$ *ist Minimum von* C: x *ist untere Schranke und* $x \in C$
- $x \in M$ *heißt Supremum von* C: x *ist kleinste obere Schranke für* C
- $x \in M$ *heißt Infimum von* C: x *ist größte untere Schranke für* C.

Definition 4. $(m, \leq)$ *lineare Ordnung für die gilt:*
$M = A \cup B$ *Schnitt von* M.

- *D.h.* $A \cap B = \emptyset, A \cup B = M$
- $\forall a \in A, \forall b \in B : a \leq b$

Welche Schnitte sind möglich?

Typ 1 A hat Maximum und B hat Minimum.
Beispiel: Jeder Schnitt in $(\mathbb{Z}, \leq)$

Typ 2 A hat kein Maximum, B hat kein Ninimum.
Beispiel: $(\mathbb{Q}_b la, \leq)$

Typ 3 (Dedekind-Schnitte) A hat kein Maximum aber B hat Minimum oder A hat Maximum und B hat kein Minimum.
Beispiel: $\mathbb{R}_{\geq 0}$

Fakt Jedes Maximum ist auch Supremum und jedes Minimum ist Infimum.

Satz 1. *Jede nach oben beschränkte nichtleere Menge von positiven reellen Zahlen besitzt ein Supremum.*

Beweis 2. *Induktion!*
Sei x_0 größte natürliche Zahl, mit $\exists x_1, x_2 \ldots : x_0, x_1 x_2 \ldots \in C$

$$x_0$$
$$x_0, x_1 \ldots$$
$$x_0, x_1 x_2 \ldots$$

Es wird erst die größte Vorkommastelle festgelegt, dann die erste größte nach dem Komma usw.
Dies ist Supremum. Aber falls man $x_0, x_1 x_2 \ldots x_i \overline{9}$ erhält, dann muss $x_{i+1} + 1$ und danach $\overline{0}$ gesetzt werden.

Satz 2. *Falls (A, B) Schnitt von $\mathbb{R}$ ist, dann gilt:*

$$sup\ A = inf\ B$$

Jeder Schnitt in $\mathbb{R}$ ist Dedekind-Schnitt.

1 Ungleichungen

1.1 Bernoulli-Ungleichung

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1\ , \forall h \in \mathbb{R}, h \geq -1 : (1+h)^n \geq 1 + n * h$$

Beweis 1. *durch vollständige Induktion*

Induktionsanfang n = 1 $1 + h = 1 + h$

Induktionsschritt n = n+1

$$\begin{aligned}(1+h)^{n+1} &= (1+h)^n(1+h)\\ &\geq (1+h*n)(1+h) \text{ \textit{nach I.V.}}\\ &= 1+h+hn+h^2n\\ &= 1+(n+1)h+h^2n\\ &\geq 1+(n+1)h \quad \square\end{aligned}$$

1.2 Ungleichung von Couchy-Schwarz

$\forall a_1, a_2, \dots a_n \in \mathbb{R}, \forall b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$

$$(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)^2 \leq (\sum_{k=0}^{n} a_k^2) * (\sum_{k=0}^{n} b_k^2)$$

Da die Summen links nichts miteinander zu tun haben, kann statt k auch j geschrieben werden. Der folgende Hilfssatz ist hilfreich für den Beweis - tolles Wortspiel!

Satz 1 (Hilfssatz).

$$\sum_{k=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}(a_k b_j - a_j b_k)^2 = 2[(\sum_{k=1}^{n} a_k^2)(\sum_{j=1}^{n} b_j^2) - (\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)^2]$$

Beweis 2 (Hilfssatz).

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}(a_k^2 b_j^2 + 2a_k b_j a_j b_k + a_j^2 b_k^2)) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 \sum_{j=1}^{n} b_j^2 - 2a_k b_k \sum_{j=1}^{n} a_j b_j + b_k^2 \sum_{j=1}^{n} a_j^2) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 \sum_{j=1}^{n} b_j^2) - 2\sum_{k=1}^{n}(a_k b_k \sum_{j=1}^{n} a_j b_j) + \sum_{k=1}^{n}(b_k^2 \sum_{j=1}^{n} a_j^2) \\
&= 2 * (\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{j=1}^{n} b_j^2 - \sum_{k=1}^{n}(a_k b_k)^2)
\end{aligned}$$

2 Betrag einer reellen Zahl

$| \, | : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&|a| \leq |b| \Leftrightarrow -b \leq a \leq b \\
&|a+b| \leq |a| + |b|, \quad |\sum_{i=1} a_i| \leq \sum_{i=1} |a_i| \\
&2|ab| \leq a^2 + b^2
\end{aligned}$$

3 Polynome

R sei ein kommutativer Ring mit 1. (z.B. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ...)
Wir beschreiben eine Funktion $f : R \to R$ durch

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Dies ist ein Polynom über R, die a_i heißen Koeffizienten. $a_n \neq 0$ wird der führende Koeffizient genannt.
Das Nullpolynom ist durch $f(x) = 0$ definiert, und das Einspolynom duch $f(x) = 1$.

3.1 Rang eines Polynoms

Der Rang ist durch den Index des führenden Koeffizienten gegeben.
Man beachte, dass das Nullpolynom keinen Rang besitzt!

$R[x]$ = Menge aller Polynome über R

Definition 1 (Multiplikation / Addition über Polynome).
Die Addition:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{j=0}^{n} b_j x^j = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i$$

Der Rang der Summe ist höchstens so groß wie der maximale Rang der beiden zu summierenden Polynome.

Die Multiplikation

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i * \sum_{j=0}^{m} b_j x^j = \sum_{k=0}^{n+m} (\sum_{i+j=k} a_i b_j) x^k$$

Der Rang nach der Multiplikatin entspricht der Summe der einzelnen Ränge.

Beispiel $(x^4 - 3x^2 + 5) * (x^2 - 2x - 7) = (1 * 1)x^6 + (-2)x^5 + (-7 - 3)x^4 + (-3 * (-2))x^3 + (-3 * (-7) + 5 * (-2))x^2 + (-2 * 5)x + (-7 * 5)$

3.2 Auswertung von Polynomen

Wenn man das Polynom $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $x = x_0$ auswerten will, dann benötigt man im naiven Fall $2x - 1$ Multiplikationen und n Additionen.
Nun stellt sich die Frage, ob das nicht besser geht?
Die Antwort lautet JA und zwar mit dem Horner-Schema, dazu schreibt man das Polynom wie folgt auf:

$$f(x) = (\dots((a_n * x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \dots + a_1)x + a_0)$$

Dadurch hat man nur noch n Multiplikationen und Additionen durchzuführen!

Man kann die Zwischenergebnisse der Horner-Auswertung von x = b aufschreiben:

$$\begin{aligned} c_n &= a_n \\ c_{n-1} &= c_n * b + a_{n-1} \\ &\vdots \\ c_0 &= c_1 * b + a_0 \end{aligned}$$

Es gilt:

$$f(x) = (x - b)(c_n x^{n-1} + c_{n-1} x^{n-2} + \ldots + c_2 x + c_1) + f(b)$$

Dies ist interessant für Nullstellen (wegen Linearfaktoren).

Einschub Können zwei verschiedene Polynome dieselbe Funktion definieren?
Für $R = \mathbb{R}$ lautet die Antwort NEIN!

Warum?
Wenn

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

dann müsste $a_0 = b_0$. Das könnte man abziehen und dann x ausklammern. Dann würde $a_1 = b_1$ sein müssen usw. Es muss also jeder Koeffizient gleich sein!

1 Wiederholung

R ist ein kommutativer Ring mit 1, dann wird mit $R[x]$ die Menge aller Polynome bezeichnet. Ein Polynom sieht wie folgt aus:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + \ldots a_1 x + a_0$$

Durch das Horner-Schema kann das Polynom anders aufgeschrieben werden:

$$f(a) = (\ldots(((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + a_{n-3})x + \ldots a_1)x + a_0$$

Diese Variante ist schneller bei der Auswertung, da man nicht so viele Multiplikationen durchführen muss.

Satz 1. *Man kann $f(x)$ schreiben als*

$$f(x) = (a - b)(c_n x^{n-1} + c_{n-1} x^{n-2} + \ldots x_2 x + c_1) + f(b)$$

wobei c_i die Zwischenergebnisse sind.

2 Nullstellen

Definition 1 (Nullstelle). *Die Nullstelle eines Polynoms $f(x)$ ist ein x_0 mit $f(x_0) = 0$.*

Aus dem Satz folgt, dass $f(x) = (x - x_0)(c_n x^{n-1} + \ldots c_1) + 0$, wobei man $x - x_0$ als Linearfaktor bezeichnet. Das Restpolynom wird mit $g(x)$ bezeichnet. Es gilt

$$f(x) = (x - x_0)g(x)$$

Falls x_0 auch Nullstelle von $g(x)$ ist, dann kann auch hier der Linearfaktor abgespalten werden.

$$f(x) = (x - x_0)^2 * h(x)$$

Daraus ergibt sich folgende Definition:

Definition 2 (l-fache Nullstelle). *x_0 heißt l-fache Nullstelle von $f(x)$, falls*

$$f(x) = (x - x_0)^l g(x)$$

Definition 3. *Sei $x_0, x_1, \ldots x_r$ die verschiedenen Nullstellen von $f(x)$ mit Vielfachheiten $l_0, l_1, \ldots l_r$ so gilt:*

$$f(x) = (x - x_0)^{l_0}(x - x_1)^{l_1}(x - x_2)^{l_2} * \ldots * (x - x_r)^{l_r} * g(x)$$

$g(x)$ hat dann den Grad $n - l_0 - l_1 \ldots - l_r - 1$

Beispiel $R = \mathbb{R}$.

$$f(x) = (x-3)^2(x+1)^4(x-4)(x^2+x+3)$$

+3 ist 2-fache Nullstelle
-1 ist 4-fache Nullstelle
+4 ist einfache Nullstelle

Schlussfolgerung: Ein Polynom von Grad n hat höchstens n Nullstellen.
Es existieren geschlossene Formeln zur Berechnung der Nullstellen für $n = 2, 3, 4$, aber es ist nachweislich nicht möglich, Formeln für $n \geq 5$ zu finden.

Polynom mit rationalen Koeffizienten?
Wir haben ein Polynom mit ganzzahligen Koeeffizienten. Und es sind nun die rationalen Nullstellen gesucht.
Sei $\frac{a}{b}$ Nullstelle.

$$a_n(\frac{a}{b})^n + a_{n-1}(\frac{a}{b})^{n-1} + \ldots + a_1(\frac{a}{b})x + a_0 = 0 \quad | * b^n$$
$$a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1}b + \ldots + a_1 ab^{n-1} + a_0 b^n = 0$$

$\Rightarrow a_n a^n$ muss Vielfaches von b sein
$a_0 b^n$muss Vielfaches von a sein.
$\Rightarrow a_n$ muss Vielfaches von b sein
a_0 muss Vielfaches von a sein

Daraus folgt ein Suchraum.

Beispiel

$$f(x) = \underbrace{6}_{a_n} x^n - 12x^2 + x + \underbrace{1}_{a_0}$$

Suchraum: $\{\pm 1/2, \pm 1/3, \pm 1/6, \pm 1\}$

3 Rationale Funktion

Der Begriff der Polynome wird auf rationale Funktionen erweitert. Diese Funktionen sind über $\mathbb{R}$ oder auch andere Körper definiert.
Es gibt

- ganzrationale Funktionen, dies entspricht den Polynomen,

- gebrochen rationale Funktion ist der Quotient $\frac{p(x)}{q(x)}$, wobei $q(x)$ und $p(x)$ Polynome sind,
- $\frac{p(x)}{q(x)}$ heißt echt gebrochene rationale Funktion, falls der Grad von $p(x)$ kleiner als der Grad von $q(x)$ ist.

Satz 2. *Jedes $\frac{p(x)}{q(x)}$ mit Grad von $p(x) \geq$ Grad von $q(x)$ lässt sich eindeutig zerlegen in*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \underbrace{h(x)}_{ganzrat.} + \underbrace{\frac{r(x)}{q(x)}}_{echt\ gebr.\ rat.}$$

Beweis 1. $p(x) = \sum_{i=9}^{n} a_i x^i$, $q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ *mit* $n \geq m$.
Beweis wird durch vollständige Induktion über $d = n - m$ geführt.

Induktionsanfang d=0

$$p(x) = \frac{a_n}{b_n} q(x) + \overbrace{p(x) - \frac{a_n}{b_n} q(x)}^{p_1(x)} \quad | : q(x)$$
$$\frac{p(x)}{q(x)} = \underbrace{\frac{a_n}{b_n}}_{ganzrat.\ da\ Polynome} + \underbrace{\frac{p_1(x)}{q(x)}}_{echt\ gebr.\ rat.}$$

Induktionsschritt d->d+1 *D.h. der Unterschied der Gerade beträgt eins.*

$$p(x) = \frac{a_n}{b_m} * x^{n-m} * q(x) + \overbrace{p(x) - \frac{a_n}{b_m} * x^{n-m} * q(x)}^{p_1(x)}$$
$$p_1(x) = \sum_{i=9}^{n} a_i x^i - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \sum_{j=0}^{m} b_j x^j = a_n x^n + \ldots - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} (b_m x^m \ldots \textit{der Grad ist} < n$$
$$\frac{p(x)}{q(x)} = \underbrace{\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + h_1(x)}_{ganzrat.} + \underbrace{\frac{p_1(x)}{q(x)}}_{echt\ gebr.\ rat.}$$

□

Wiederholung $R[x]$ Polynome mit Koeffizient in R, Ringstruktur. Wenn R ein Körper ist, dann kann man Polynomdivision durchführen.

1 Eulkidischer Algorithmus zur Bestimmung des $ggT(p(x), q(x))$

Definition 1 (ggT). *Der $ggT(p(x), q(x))$ ist Polynom $d(x)$ maximalen Grades mit führenden Koeffizienten $= 1$, so dass $p(x) = d(x) * g(x)$ und $q(x) = d(x) * h(x)$*

Für $\mathbb{Z}$: $ggT(a, b) = ggT(b, a \mod b)$
Das Schema wird auch so auf Polynome übertragen:
$ggT(p(x), q(x))$

```
s(x) = p(x)
t(x) = q(x)
while (t(x) != 0)
  r = Rest bei s(x) / t(x)
  s(x) = t(x)
  t(x) = r
return s(x)
```

Beispiel: $ggT(x^3 + 2x^2 + x - 4, x^2 - 1)$

$$(x^3 + 2x^2 + x - 4) : (x^2 - 1) = x + 2 + \frac{2x - 2}{x^2 - 1}$$
$$(x^2 - 1) : (2x - 2) = \frac{1}{2}(x + 1) \text{ Rest } 0$$
$$ggT() = x - 1 (= 2x - 2)$$

Definition 2 (Definitionsbereich). *Definitionsbereich einer reellen rationalen Funktion $\frac{p(x)}{q(x)}$ ist*

$$\mathbb{R} \setminus \{\textit{Nullstellen von } \frac{q(x)}{ggT((p(x), q(x))}\}$$

2 Polynominterpolation

Allgemeine Aufgabe: Gegeben seien reelle Messwerte für die Messpunkte $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ mit den Messwerten y_i.
Es ist eine Funktion (ein Polynom) f mit $\forall 0 \leq i \leq n, f(x_i) = y_i$ gesucht.

2.1 Vorbetrachtung

Man hat genau einen Messpunkt gegeben. Dann gibt es genau ein Polynom von Grad 0, nämlich $f(x) = y_0$. Für ein Polynom von Grad 1 gibt es keine Eindeutigkeit mehr, es gibt immer mehrere Möglichkeiten.
Es sind zwei Messwerte gegeben, dann gibt es genau ein Polynom von Grad 1, nämlich eine Gerade durch die beiden Punkte.
Vermutung: $n+1$ Messwerte lassen sich eindeutig durch ein Polynom vom Grad n erklären.

Diesen Vorgang, Messwerten einer Funktion zuzuordnen, nennt man Interpolation.

2.2 Lagrange-Interpolation

Satz 1. *$n+1$ Messwerte lassen sich durch Polynom vom Grad $\leq n$ eindeutig iterpolieren.*

Beweis 1 (nach Lagrange). *Idee: $p(x)$ sei das Polynom, welches interpoliert. Wir schreiben. $p(x) = y_0p_0(x) + y_1p_1(x) + \ldots + y_np_n(x)$ Dabei ist $p_i(x)$ ein Polynom von Grad n mit*

$$p_i(x_j) = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ 1 & j = i \end{cases}$$

$$p_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

Ist Polynom von Grad $= n$.

$$p(x_j) = \begin{cases} \frac{(x_i-x_0)(x_i-x_1\ldots}{(x_i-x_0)(x_i-x_1\ldots} = 1 & j = i \\ \frac{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\ldots(x_j-x_j)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots} = 0 & j \neq i \end{cases}$$

$p(x)$ als Summe $y_0p_0(x) + \ldots + y_np_n(x)$ hat Grad $\leq n$.
Es existiert also ein Polynom, welches unsere Anforderungen abdeckt. Jetzt muss noch geprüft werden, ob es auch eindeutig ist.

Eindeutigkeit (indirekt): Annahme: $\exists p(x), q(x) : p(x) \neq q(x)$ mit $p(x_i) = q(x_i) \forall 0 \leq i \leq n$.
$p(x) - q(x)$ hat $x_0, x_1, \ldots x_n$ als Nullstellen. Diese können als Linearfaktoren abgespaltet werden.

$$\underbrace{p(x) - q(x)}_{Grad\ n} = \underbrace{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n) * f(x)}_{Grad\ n+1}$$

Dies geht nur, wenn $f(x) = 0$ und somit auch $p(x) - q(x) = 0$ ist. Daraus folgt $p(x) = q(x)$ □

Ein Nachteil dieses Verfahren ist, dass für jede neue Messstelle, die dazu kommt, sich alles Polynome ändern. Deshalb gibt es ein anderes Verfahren zu Interpolation, das Newton-Verfahren.

2.3 Newtoninterpolation

Ansatz:

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_1)(x - x_0) \dots \alpha_n(x - x_{n-1})(x - x_{n-2}) \dots (x - x_0)$$

Für

$$\begin{aligned}
&x = x_0 \quad p(x_0) = y_0 = \alpha_0 && \alpha_0 = y_0 \\
&x = x_1 \quad p(x_1) = y_1 = y_0 + \alpha_1(x_1 - x_0) && \alpha_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\
&x = x_2 \quad p(x_2) = y_2 = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_2 - x_0}(x_1 - x_0) + \alpha_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_0) && \alpha_2 = \dots
\end{aligned}$$

$$\alpha_2 = \frac{y_2 - y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)} = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

Beispiel

x	y
-1	-1
0	-5
1	-5
2	5

```
-1(\alpha0)
   \
    -4(\alpha1)
   /    \
-5       2(\alpha2)
   \    /  \
     0      1(\alpha3)
   /    \  /
-5       5
   \    /
```

```
    10
   /
5
```

$$\alpha_1 = \frac{-5-(-1)}{0-(-1)} = 4$$

$$\alpha_2 = \frac{\frac{-5-(-5)}{1-0} - \frac{-5-(-1)}{0-(-1)}}{1-(-1)} = 2$$

$$p(x) = \underbrace{-1}_{\alpha_0} + \underbrace{-4}_{\alpha_1}(x+1) + \underbrace{2}_{\alpha_2}(x+1)*x + \underbrace{1}_{\alpha_3}(x+1)(x)(x-1)$$

1 Fortsetzung Polynominterpolation

gegeben: $x_0 < x_1 \dots x_n$ sind die Messstellen.
$y_0, y_1 \dots y_n$ sind die Messwerte.
Finde nun $p(x)$ von Grad $\leq n$ mit $p(n) = y$.

1.1 Newtoninterpolation

Ansatz:

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \alpha(x - x_0)\dots(x - x_{n-1})$$

Ersetzte die x_i liefert Gleichungssystem zu Bestimmung der α_i.

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 \to y_0 = \alpha_0 \\
&x_1 \to y_1 = y_2 + \alpha_1(x_1 - x_0) \\
&\quad \alpha_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\
&x_2 \to y_2 = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - 2 - x_0) + \alpha_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_0) \\
&\alpha_2 = \frac{y_2 - y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)} = \frac{\frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_2 - x_1}}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_1} - \frac{(y_1 - y_0)(x_2 - x_0)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)}}{x_2 - x_1} \\
&\quad = \frac{\frac{(y_2 - y_0)(x_1 - x_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)}}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{y_2x_1 - y_2x_0 - y_0x_1 + y_0x_1 - y_1x_2 + y_1x_0 + y_0x_2 - y_0x_0}{(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)}}{x_2 - x_0} \\
&\quad \stackrel{Trick}{=} \frac{\frac{y_2x_1 - y_2x_0 - y_0x_1 + y_1x_1 - y_1x_2 + y_1x_0 + y_0x_2 - y_1x_1}{(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)}}{x_2 - x_0} \\
&\quad = \frac{\frac{(y_2 - y_1)(x_1 - x_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_1)}{(x_2 - x - 1)(x_1 - x_0)}}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}
\end{aligned}$$

Schema der dividierten Differenzen

```
x0 y0 |
      | y01
x1 y1 |     y012
      | y12      y0123
x2 y2 |     y123
      | y23
x3 y3 |
```

Wobei sich die y_{ij} wie folgt berechnen:

$$y_{01} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$
$$y_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$y_{012} = \frac{y_{12} - y_{01}}{x_2 - x_0}$$
$$y_{123} = \frac{y_{23} - y_{12}}{x_3 - x_1}$$
$$y_{0123} = \frac{y_{123} - y_{012}}{x_3 - x_0}$$

Wenn jetzt noch ein x_4, y_4 hinzukäme, dann müssen nicht alle Polynome neu berechnet werden, sondern nur: y_{34}, y_{234}, y_{234} und y_{01234}.

```
x0 y0 |
      | y01
x1 y1 |     y012
      | y12        y0123
x2 y2 |     y123         y01234
      | y23        y1234
x3 y3 |     y234
      | y34
x4 y4 |
```

2 Zusammenfassung Polynome

Wir haben verschiedene Darstellungsweisen kennengelernt:

- $R[x]$ ist die Ringdarstellung

- R Körper.

- Summendarstellung

  $$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

  – übersichtlich rechnen
  – Koeffizientenvergleich

- Horner-Form

$$p(x) = (\ldots(a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2}\ldots a_1)x + a_0$$

Zur Berechnung von $p(b)$ und Herleitung der Zerlegung

$$p(x) = (x-b)(c_n x^{n-1} + c_{n-1}x^{n-2} + \ldots + c_1) + p(b)$$

- Produktform
Diese Form erhält man aus der Horner-Form und den Nullstellen

$$p(x) = (x-b_1)^{l_1}(x-b_2)^{l_2}\ldots(x-b_r)^{l_r} * q(x)$$

Wobei die b_i die Nullstellen mit Vielfachheit l_i sind.

- Interpolation

3 Eine Anwenundung - Fingerprint-Methode

Zum Pattern Matching.

Aufgabe Σ ist das Alphabet und der Text $T \in \Sigma^+$ mit $|T| = m$ und dem Pattern $P \in \Sigma^+$ mit $|P| = n$ gegeben.
Jetzt sollen alle i mit $T(i) = P(1), T(i+1) = P(2), \ldots, T(i+n-1) = p(n)$ gefunden werden.

Die triviale Lösung sieht so aus: Probiere alle Stellen einfach durch. Dies benötigt

$$\underbrace{m-n+1}_{mgl.\ Startstellen} * \underbrace{n}_{Vergleiche}$$

Da m viel viel großer als n ist, braucht man ca. $m * n$ Vergleiche

Es gibt bessere vergleichsbasierte Lösungen, die nur $O(n+m)$ Vergleiche benötigen.

Alternative: Fingerprint. D.h. wir suche nicht nach dem Muster direkt, sondern ordnen dem Muster einen Eigenschaft, z.B. den Fingerprint zu. Und dann wird nach dem Fingerprint gesucht.
$\Sigma = \{0, 1\}$. Die Idee ist, dass Muster als Zahl zu interpretieren.

$$P \to H(P) = \sum_{i=1}^{m} 2^{n-i} P(i)$$

$$
\begin{aligned}
P &= 1|0|1|1 \\
H(P) &= 2^3 + 2^1 + 2^0 = 11 \\
T_r &= T(r)t(n+1)\dots T(r+n-1) \\
T_r \rightarrow H(T_r) &= \sum_{i=1}^{n} 2^{n-i} \underbrace{T_r(i)}_{=T(n+i+1)}
\end{aligned}
$$

Trick $H(T_r)$ aus $H(T_{r+1})$

$$H(T_r) = 2 * (H(T_{r-1}) - 2^n T(r-1) + T(r+n-1)$$

Idee Rechnen modulo einer zufällig gewählten Primzahl p. Statt $H(P)$ haben wir $H_p(P) = H(P) \mod p$, $H(T_r)$ wird zu $H_p(T_r) = H(T_r) \mod p$.

Wichtig Modulorechnung verträgt sich mit dem Horner-Schema!!

$$(a+b) \mod = (a \mod p + b \mod p) \mod p$$

$$(a*b) \mod p = ((a \mod p)(b \mod p)) \mod p$$

Einiges über Primzahlen Wir nehmen $n \in \mathbb{N}$ und $\pi(n)$ sei die Anzahl der Primzahlen $\leq n$

Satz 1. *$\pi(n)$ kann ungefähr durch*

$$\frac{n}{\ln n} \leq \pi(n) \leq 126 * \frac{n}{\ln n}$$

bestimmt werde.

Satz 2. *Sei $n > 29$, dann ist*

$$\prod_{p \ Prim, p \leq n} > 2^n$$

Für $n \geq 29$ und $x < 2^n$, dann hat x weniger als $\pi(n)$ viele verschiedene Primteiler.

Wie macht man das nun?
Rechnen modulo p. Falls $H(P) = H(T_r) \Rightarrow H_p(P) = H_p(T_r)$ aber falls $H_p(P) = H_p(T_r) \Rightarrow p \mid H(P) - H(T_r)$
Ein "Falsches Match" zeichnet sich durch $H(P) \neq H(T_r)$ aber $H_p(P) = H_p(T_r)$ aus.
Sei R mit $|R| \leq m$ die Menge aller Positionen im Text an denen P nicht beginnt, und $s \in R \Leftrightarrow H(P) \neq (H(T_s)$

$$\prod_{s \in R} |H(P) - H(T_s)| \leq 2^{nm}$$

Korrolar Falls $mn \geq 29$, dann hat $\prod_{s \in R} |H(P) - H(T_s)|$ weniger als $\pi(n * m)$ viele Primteiler.
Falls ein falsche Match vorliegt, dann teilt p $|H(P) - H(T_r)|$ also auch $\prod_{s \in R} |H(P) - H(T_s)|$ Daraus folgt, p ist einer der $\leq \pi(n + m)$ vielen Primteiler des Produktes.

Satz 3. *$|T| = m, |P| = n$ mit $mn \geq 29$. Sei p zufällige Primzahl $\leq i$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit für ein falsche Match $\leq \frac{\pi(nm)}{\pi(i)}$*

Beispiel $n = 250, m = 4000$. $i = nm^2 = 2^2 2$ Dann ist Pr(falsches Match) $< 10^{-3}$

1 Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

Motivation $x^2 + px + q = 0$ in Reellen Zahlen:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$$

Was passiert, wenn $q > (\frac{p}{2})^2$?
Wenn man von den komplexen Zahlen, die reellen betrachtet, dann könne wir was über $R[x]$ lernen.
Zusätzlich werden wir die Darstellungsformen von $z \in \mathbb{C}$ kennenlernen.
Beschreibung: $i = \sqrt{-1}$

Definition 1 (algebraische Darstellung). *Eine komplexe Zahl z hat die (algebraische) Darstellung*

$$z = \underbrace{a}_{Realteil} + i * \underbrace{b}_{Imaginrteil}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$

Hammilton (1837): Eine komplexe Zahl z kann als Punkt in der komplexen Zahlenebene dargestellt werden, wobei die x-Achse den reellen Anteil und die y-Achse den imaginären Anteil angibt.

Wie betten sich die reellen Zahlen ein?

$$\mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad r \in \mathbb{R} \to r + i * 0$$

1.1 Rechnen mit komplexen Zahlen

$z = x + iy, \quad w = u + iv$

- $z = w$ genau dann wenn $x = u$ und $y = v$
- $z \pm w = (x \pm u) + i(y \pm v)$
- $z * w = (x + iy)(u + iv) = xu - yv) + i(yu + xv)$
- $\frac{z}{w} = \frac{x+iy}{u+iv} = \frac{(x+iy)(u-iv)}{u^2+v^2} = \frac{(xu+yv)+i(yu-xvs)}{u^2+v^2}$

Wenn an jetzt reelle Zahlen einsetzt, dann kommt auch schön das richtiger Ergebnis raus.
$\mathbb{C}$ ist nach dieser Definition mit $+, *$ ein Körper!!

Beispiel $z = x + iy$ Was ist $i * z$?

$$(0 + i1) * (x + iy) = -y + ix$$

Graphisch entspricht $i * z$ der Drehung um $+\frac{\pi}{2}$ in der Ebene.

Definition 2 (Betrag). *Der Betrag von $z = x + iy$ ist $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, das ist die euklidische Länge (entspricht dem Abstand zum Koordinatenursprung).*

Definition 3 (konjugiert). *Die zu $z = x+iy$ konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ ist $\overline{z} = x-iy$ Dies entspricht der Spiegelung an der Real-Achse.*

Fakt

1. $|z| = |\overline{z}|$
2. $z * \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$

1.2 Rechenregeln

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \ , \ \overline{zw} = \overline{z} * \overline{w} \ , \ \overline{(\frac{z}{w})} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$$

$$Re\ z = \frac{1}{2}(z - \overline{z})$$

$$Im\ z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$$

$$|zw| = \sqrt{zw * \overline{zw}} = \sqrt{zw * \overline{zw}} = \sqrt{z\overline{z}}\sqrt{w\overline{w}} = |z| * |w|$$

1.3 Polynome

Wir können Polynome $\mathbb{C}[x]$ einführen, mit denen alles, also Horner, Euklid, Interpolation etc. analog gemacht werden kann zu $\mathbb{R}[x]$
Komplexe Nullstellen: für

$$q > \frac{p^2}{4} : x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

Satz 1 (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes nichtkonstante Polynom, d.h. von mind. Grad 1, mit komplexen Koeffizienten besitzt eine komplexe Nullstelle.*

Der dazugehörige Beweis ist ziemlich kompliziert, und wird nicht gezeigt.

Damit lässt sich jedes $p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^n \in \mathbb{C}$ schreiben als

$$p(z) = a_n * (z - z_1)^{l_1}(z - z_2)^{l_2} \dots (z - z_k)^{l_k}$$

dabei sind die z_i die verschiedenen komplexen Nullstellen mit Vielfachheit l_i. Die Summe aller l_i ist n.

Beobachtung Wenn $w \in \mathbb{C}$ Nullstelle von $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ ist, so ist auch $\overline{w}$ Nullstelle!

$$
\begin{aligned}
&a_n\overline{w}^n + a_{n-1}\overline{w}^{n-1} + \ldots + a_1\overline{w} + a_0 \\
=&a_n\overline{w^n} + a_{n-1}\overline{w^{n-1}} + \ldots + a_1\overline{w} + a_0 \\
=&\overline{a_n}\overline{w^n} + \overline{a_{n-1}}\overline{w^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 w} + \overline{a_0} \\
=&\overline{a_n w^n + a_{n-1}w^{n-1} + \ldots + a_1 w + a_0} \\
=&\overline{0} = 0
\end{aligned}
$$

Sei w komplexe Nullstelle von $p(x) \in \mathbb{R}$. Daraus folgt, $\overline{w}$ ist auch Nullstelle! Wir können $(x-w)$ und $(x-\overline{w})$ als Linearfaktoren abspalten.

$$
\begin{aligned}
&(x-w)(x-\overline{w}) \qquad \text{mit } w = u + iv \\
=&x^2 - \overline{w}x - wx + (u^2 - v^2) \\
=&x^2 - \underbrace{(\overline{w} + w)}_{2Re} x + \underbrace{(u^2 - v^2)}_{reelle\ Z.} \qquad \text{reelles Polynom!}
\end{aligned}
$$

Es folgt folgender Satz

Satz 2. *Jedes reelle Polynom lässt sich faktorisieren als*

$$\mathbb{R}[x] \in p(x) = a_1 \underbrace{(x-x_1)^{l_1} \ldots (x-x_k)^{l_k}}_{reelle\ Nst.} \underbrace{(x^2 + c_1x + d_1)^{l_1} \ldots (x^2 + c_k c d_k)^{l_k}}_{hat\ keine\ reelle\ Nst\ mehr}$$

Korrolar Jedes reelle Polynom ngeraden Grades hat eine reelle Nullstelle.

Beispiel

1. $x^4 - 1 = 0$, $w = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)$

   hat im komplexen die Faktorisierung:
   $(x-w)(x-\overline{w})(x+w)(x+\overline{w})$
   und im Reellen:
   $(x^2 - \sqrt{2}x + 1) * (x^2 + \sqrt{2}x + 1)$

2. $p(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$, $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ist Nullstelle. Dann ist also auch $\overline{z_1} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ Nullstelle.

   $$(x-z)(x-\overline{z}) = x^2 - x + 1$$

   Also kann man $x^2 - x + 1$ als Faktor von $p(x)$ abspalten.

   $$(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1) : (x^2 - x + 1) = (x^2 - x + 1)$$

$$p(x) = (x - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}i)^2(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})^2$$

im Komplexen

1 Darstellungsformen komplexer Zahlen

1.1 algebraische Darstellung

Hatten wir letzte mal, das ist

$$z = a + ib$$

1.2 Polarkoordinaten

z ist bestimmt durch die Länge der Lösungssequenz zum Ursprung und dem Winkel ϕ zwischen Segemnt und positiver x-Achse. Nach Konvention liegt $\phi \in (-\pi, +\pi)$.

$$z \rightarrow \text{Betrag } |z|,\ \text{Phase } argz \in (-\pi, +\pi)$$

$(|z|, \phi)$ sind die Polarkoordinaten.
Wie kann umgerechnet werden?

$$\begin{aligned}
|z| &= \sqrt{a^2 + b^2} \\
arg\ z &= \begin{cases} \arccos \frac{a}{|z|} & b \geq 0 \\ -\arccos \frac{a}{|z]} & b < 0 \end{cases} \\
z &= |z|(\cos\phi + i * \sin\phi) \text{ trigonometrische Darstellung}
\end{aligned}$$

Rechnen mit der trigonometrischen Darstellung

$$\begin{aligned}
z &= |z|(\cos\phi + i \sin\phi) \\
w &= |w|(\cos\phi_1 + i \sin\phi_1) \\
z * w &= |z||w|(\cos\phi\cos\phi_1 - \sin\phi\sin\phi_1 + i(\sin\phi\cos\phi_1 + \cos\phi\sin\phi_1)) \\
&= |z||w|(\cos(\phi + \phi_1) + i(\sin(\phi + \phi_1)) \\
\frac{z}{w} &= \frac{|z|}{|w|}(\cos(\phi - \phi_1) + i \sin(\phi - \phi_1))
\end{aligned}$$

1.3 Exponentialform

Euler: $e^{i\phi} = \cos\phi + i \sin\phi$
Betrag: $|e^{i\phi}| = \sqrt{\cos^2\phi + \sin^2\phi} = 1$

$$\begin{aligned}
e^{x+iy} &= e^x e^{iy} \quad , \quad y = k * 2\pi \\
|e^{x+iy}| &= |e^x||e^{iy}| = e^x
\end{aligned}$$

Ann: $\phi = \omega t + \alpha$, t ist die Zeit und $\omega \in \mathbb{R}$
Was ist nun am Zeitpunkt t? -> Es entsteht eine $\cos$-Kurve.

Formel von Moivre

$$\forall \phi, \phi_1 : e^{i\phi} * e^{i\phi_1} = e^{i(\phi+\phi_1)}$$
$$(e^{i\phi})^n = e^{in\phi}$$
$$\overline{e^{i\phi}} = \cos\phi - i\sin\phi = \cos(-\phi) + i\sin(-\phi)$$
$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$
$$e^{i\pi} = -1$$
$$e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i$$
$$e^{i2\pi} = 1$$

Wichtige Werte:

$$\sin 0 = 0$$
$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{1}$$
$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\ldots$$

Einfaches Potenzieren von komplexen Zahlen in Exponentialform

Beispiel $z = 2 + 2i$, was ist z^{12}?
Umwandlung in Exponentialform:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{8}e^{i\frac{2}{\sqrt{8}}} = \sqrt{8}e^{i\frac{\pi}{4}} \\ z^{12} &= \sqrt{8}^{12}e^{i3\pi} \\ &= 8^6 e^{i\phi} \\ &= -8^6 \end{aligned}$$

2 Wurzelziehen einer komplexen Zahl

$z^n - a = 0$ Der Hauptsatz der Algebra besagt es existieren n Nullstellen. Diese heißen auch Wurzeln der komplexen Zahl a.
zunächst $a = 1$. Nennt man auch Einheitswurzeln

$$\sqrt{1} = \{1, e^{i\frac{2\pi}{n}1}, e^{i\frac{2\pi}{n}2}, \ldots, e^{i\frac{2\pi}{n}n-1}\}$$

Bezeichnung: $\{\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}\}$
Probe:

$$(e^{i\frac{2\pi}{n}})^n = e^{i2\pi} = e^{i0} = 1$$

n-te Einheitswurzel entsprechen einem regelmäßigem n-Eck in dem Einheitskreis.

beliebiges $a \in \mathbb{C}$ $a = |a|e^{i\phi}$. Sei $w = \sqrt{|a|}e^{i\frac{\phi}{n}}$
Behauptung: $w^n = a$.

$$\begin{aligned} w^n &= |a|e^{i\frac{\phi}{n}n} \\ &= a \\ \sqrt[n]{a} &= \{w, w * \zeta_1, w\zeta_2, \ldots, w\zeta_{n-1}\} \end{aligned}$$

Beispiel

$$\sqrt[5]{-1} = (e^{i\pi})^{\frac{1}{5}} = \{e^{i\frac{\pi}{5}}, e^{i\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}}, e^{i\frac{5\pi}{5}}, e^{i\frac{7\pi}{5}}, e^{i\frac{9\pi}{5}}\}$$

3 Kubische Gleichung

$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$
Substitution: $x = -\frac{a_{n-1}}{n} + t$. Wir erhalten eine neue Gleichung, bei der der zweitgrößte Potenz fehlt.

$$t^3 + at + b = 0$$

Suche Lösung der Form $t = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$.

$$\begin{aligned} t^3 &= (\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v})^3 = u + 3\sqrt[3]{a^3 v} + \sqrt[3]{uv^3} + v \\ &= 3\sqrt[3]{u+v}(\underbrace{\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}}_{=t}) + u + v \\ \Rightarrow a &= 3\sqrt[3]{uv}, b = -(u+v) \end{aligned}$$

u und v sind Lösungen einer quadratischen Gleichung.

$$t_1 = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{(\frac{b}{2})^2 + (\frac{a}{3})^3} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt[3]{(\frac{b}{2})^2 - (\frac{a}{3})^3}}}$$

1 Nachtrag: Überlagerung der gleichfrequenten Schwingungen

$e^{i(\phi+\omega t)}$, wobei t die Zeit ist. Das hatten wir schon das letzte mal. Genauso kann man natürlich auch $Ae^{i\phi}$ kreisen lassen durch $Ae^{i\phi+\omega t}$. Kann anders geschrieben werden zu

$$Ae^{i(\phi+\omega t)} = A(\cos\phi + \omega t + i\sin(\phi+\omega t))$$

Aufgabe Gegeben sind gleichfrequente Schwingungen

$$u_1(t) = c_1 * \sin(\phi_1 + \omega t)$$
$$u_2(t) = c_2 * \sin(\phi_2 + \omega t)$$

Was ist nun $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$??

Lösung Interpretiere $u_1(t)$ als Imaginärteil $Im\hat{u} * \sin(\phi_1 + \omega t)$ bzw. $u_2(t)$ als $Im\hat{u}_2 * \sin(\phi_2 + \omega t)$

$$\hat{u}_1(t) = c_1(\cos(\phi_1 + \omega t) + i\sin(\phi_1 + \omega t)) = c_1 e^{i(\phi_1+\omega t)}$$
$$\hat{u}_2(t) = c_2(\cos(\phi_2 + \omega t) + i\sin(\phi_2 + \omega t)) = c_2 e^{i(\phi+\omega t)}$$
$$\hat{u}(t) = \hat{u}_1(t) + \hat{u}_2(t) = \underbrace{(c_1 e^{\phi_1} + c_2 e^{i\phi_2})}_{=c} * e^{i\omega t}$$

Dann $u_(t) = Im(ce^{i(\phi+\omega t)})$.
Addition durch Umrechnung in algebraische Darstellung

Beispiel

$$u_1(t) = 4\sin(2t)$$
$$u_2(t) = 3\cos(2t - \frac{\pi}{6}) = 3\sin(2t - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}) = 3\sin(2t - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) = 3\sin(2t + \frac{\pi}{3})$$
$$\hat{u}_1(t) = 4e^{i2t}$$
$$\hat{u}_2(t) = 3e^{i(t2+\frac{\pi}{3})}$$
$$\hat{u}(t) = \hat{u}_1(t) + \hat{u}_2(t) = (4 + 3e^{i\frac{\pi}{3}})e^{i2t})$$
$$= 4 + 3e^{i\frac{\pi}{3}} = 4 + 3(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}) \approx 5,5 + i2,6$$
$$u(t) = 6,08\sin(2t + 0,44)$$

2 Folgen, Grenzwerte und Stetigkeiten von Funkitonen

Motivation

1. Reelle Zahl = Äquivalenzklasse von Folgen rationaler Zahlen.
2. Bestimmung von Nullstellen (numerisch), z.B. Intervallhalbierung
3. Folgen für die Untersuchung von stetigen Funktionen
4. Klassische Funktionen wie Exponential-, Sinus, Kosinus-Funktionen werden als Grenzwerte von Folgen interpretiert.

Definition 1 (Folge). *Eine Folge ist eine Abbildung*

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$a_n = f(n)$ *wird als* n*-tes-Folgeglied bezeichnet. Man schreibt auch* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Beispiele

1. Die konstante Folge: $\forall a : f(n) = a$
2. Harmonische Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n>0}$
3. $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n>0}$
4. rekursiv definierte Folgen, z.B. Fibonacci, Nullstellenapproximation
   Collatz-Folge: a_n beliebig.
   $$a_n = \begin{cases} 3a_{n-1} + 1 & a_{n-1} \text{ ungerade} \\ \frac{a_{n-1}}{2} & a_{n-1}\text{gerade} \\ 1 & a_n = 1 \end{cases}$$
5. geometrische und arithmetische Folgen
   $$a_n = a_0 q^n$$
   $$a_n = a_0 + nd$$
6. Wurzelfolge
7. Eulerfolge $((a + \frac{1}{n})^n)_{n>0}$. Hier von ist der Grenzwert e.
8. Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. folge der Parialzahen

Definition 2 (Beschränktheit). $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt beschränkt, genau dann wenn*

$$\exists k \in \mathbb{R} \forall a_n : |a_n| < k$$

Nach oben beschränkt

$$\exists k \in \mathbb{R} \forall a_n : a_n < k$$

nach unten beschränkt:

$$\exists k \in \mathbb{R} \forall a_n : a_n > k$$

monoton wachsen $\forall n : a_{n+1} \geq a_n$
streng monoton wachsend: $\forall n : a_{n+1} > a_n$

2.1 Konvergenzverhalten

Definition 3. $a \in \mathbb{R}, \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0.$

$$U_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} | |x - a| < \epsilon\}$$

Definition 4 (konvergent). $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt konvergent gegen* $a \in \mathbb{R}$*, falls*

$$\forall \epsilon > 0 : \exists n_0 \forall N > n_0 : a_n \in U_\epsilon(a)$$

Man schreibt auch für $a_n \to a$ *für* $n \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} a_n = a$$

Eine nicht konvergente Folge heißt divergent.

Beispiel für Konvergenz $(\frac{1}{n})_{n>0}$. Wir zeigen, dass $\lim \frac{1}{n} = 0$
Beweis: Sei $\epsilon > 0$ beliebig gewählt. Zu zeigen: $\exists N_0(\epsilon) \forall N > N_0(\epsilon) |\frac{1}{N} - 0| \leq \epsilon$
Wähle $N_0 > \frac{1}{\epsilon}$ Für $N > N_0$ gilt $N > \frac{1}{\epsilon}$ und damit $\frac{1}{N} < \epsilon$. $\square$

Beispiel für Divergenz $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent.
Beweis (indirekt): Angenommen $a \in \mathbb{R}$ ist Grenzwert. Betrachte $\epsilon = 1$. $\forall N > N_0(1)$: $|a_N - a| < 1$ so auch $|a_{N+1} - a| < 1$

$$|a_N - a_{N+1}| = |a_N - a + a - a_{N+1}| < 2$$

Widerspruch!

eine Folge ist genau dann konvergent, wenn sie ab einem Folgeglied konvergent ist.

ACHTUNG Auf den Sprachgebrauch achten:

- Der Grenzwert von $(\frac{1}{n})$ geht gegen 0. Das ist falsch, der Grenzwert IST 0.
- Falsch: a ist Grenzwert, wenn die a_n immer näher kommen. Z.B. bei $1 + \frac{1}{n}$, hier ist 0 nicht Grenzwert.
- Falsch: a_n kommt a beliebig nahe

Satz 1. *Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig.*

Beweis 1. *Der Beweis wird indirekt geführt.*
Angenommen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *hat zwei Grenzwerte* a, b *und sei* $a < b$. *Wähle* $\epsilon < \frac{b-a}{2}$. $\exists N_0 N_1 L \forall n > N_0 a_n \in U_\epsilon(a) \wedge \forall n > N_1 a_n \in U_\epsilon(b)$ *bla?* $a \in U_\epsilon(a) \cup U_\epsilon(b)$. *Widerspruch, da der Durchschnitt leer ist.*

1 reellwertige Folgen

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Beispiel Sei $x > 1$. Dann ist

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt[n]{x} = 1$$

Beweis: Sei $\epsilon > 0$. Zu zeigen: $\exists n_0(\epsilon) : \forall n > n_0 |\sqrt[n]{x} - 1| < \epsilon$. Weil $\sqrt[n]{x} > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{x} - 1 < \epsilon$

$$1 + y_n = \sqrt[n]{x}$$
$$(1 + y_n)^n = x$$
$$1 + ny_n + \binom{n}{2} y_n^2 + \ldots + y_n^n > n * y_n$$
$$\Rightarrow y_n < \frac{x}{n}$$

Wähle $\lceil \frac{x}{\epsilon} \rceil = n_0$. Für $n > n_0$ gilt

$$y_n \le \frac{x}{n} \le \frac{x}{\frac{x}{\epsilon}} < \epsilon$$

Einfach Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis $\{a_n | a_i \in \mathbb{N}\} \subseteq \underbrace{\{a_0 a_1 \ldots a_n\}}_{endlich => beschrnkt} \cup \underbrace{U_\epsilon(a)}_{beschrnkt}$

Da alles beschränkt ist, muss es insgesamt auch beschränkt sein.

2 Konvergenzkriterien

1. Vergleichskriterium

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

und $\forall a_n \le b_n \le c_n$ Dann folgt falls $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} c_n = b$ auch $\lim_{n \to \infty} b_n = b$

Beweis:

$$b = \lim a_n : \forall \epsilon \exists n_0 \forall n > n_0 : |a_n - b| < \epsilon$$
$$b = \lim c_n : \forall \epsilon \exists n_o' \forall n > n_0' : |c_n - b| < \epsilon$$
$$n > \max\{n_0, n_o'\}$$
$$b - \epsilon < a_n \le b_n \le c_n < b + \epsilon$$
$$\Rightarrow b - \epsilon < b_n < b + \epsilon \Rightarrow |b_0 - b| < \epsilon$$

2. Cauchy-Kriterium $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent genau dann wenn

$$\forall\epsilon > 0 \exists n_0(\epsilon) \forall n, m > n_0 : |a_n - a_m| \leq \epsilon$$

Beweis: Konvergenz $\Rightarrow$ Cauchy. Zu zeigen: $\forall\epsilon > 0 \exists n_0 \forall n, w > n_0 : |a_n - a_m| < \epsilon$.
Bekannt ist $\forall\epsilon' > 0 \exists n_0' \forall n > n_0 : |a_n - a| < \epsilon'$

$$|a_n - a_m + a - a| = |\underbrace{a_n - a}_{\leq\epsilon'} + \underbrace{a - a_m}_{\leq\epsilon'}| \leq |a_n - a| + |a_m - a|$$

Betrachte $\epsilon > 0$. Setzte $\epsilon' > \frac{\epsilon}{2}$

$$\Rightarrow \exists n_0' \forall n > n_0' : |a_n - a| < \epsilon = \frac{\epsilon}{2}$$
$$\Rightarrow |a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| \leq \epsilon$$

Die andere Richtung kann im Skript bewundert werden.

3. Monoton wachsende Folge, die von oben beschränkt ist, ist konvergent (analog zu fallend)
Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend und beschränkt. Es wird die Vollständigkeitseigenschaft reeller Zahlen benutzt:

$$\exists \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$$

Behauptung: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n | a_n \in \mathbb{N}\}$. Es ist $\epsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 : a_n > a - \epsilon$ zu zeigen.

2.1 Rechenregeln konvergenter Folgen

Sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n, b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n * b_n) = a * b$
insbesondere $\lim\limits_{n\to\infty}(c * a_n) = c * a$
Falls $b \neq 0$ und $b_n \neq 0$ für alle n gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

3. Falls $\forall n : a_n \leq b_n \Rightarrow a \leq b$
Achtung: $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, aber $\lim \frac{1}{a_n} = \lim \frac{1}{n} = 0$
4. Jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat Grenzwert a.

Beispiele

1.
$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1+n}{2n+3} \\
a_n &= \frac{n(\frac{1}{n}+1)}{n(2+\frac{3}{n})} \\
\lim a_n &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

2. Wurzelfolge
$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{2}{a_n}}{2}$$
Ab 2. Glied monoton fallend und von unten beschränkt.
$$\frac{a_n + \frac{2}{a_n}}{2} \geq \sqrt{a_n \frac{2}{a_n}} = \sqrt{2}$$
$\Rightarrow$ monoton fallen und beschränkt von unten
$\Rightarrow$ konvergent, $\lim a_n = a$
Trick: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} \Rightarrow a = \frac{a+\frac{2}{a}}{2}$
$\Rightarrow a^2 = 2$

3. $a_n = \frac{1}{n^2}$ Folge der Partialsummen (s_n).
(s_n) ist monoton steigend und von oben beschränkt:
$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k*(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$
$$
\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \\
&= 1 + (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \ldots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 2 - \frac{1}{n} < 2
\end{aligned}
$$
$\exists \lim a_n \sum_{k=0}^{\infty} = \frac{\pi^2}{6}$

4. Geometrische Folge bzw. Reihe, $q > 0$
$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k =^+ q + q^2 + q^3 + \ldots$$

Für $q \geq 1$: divergent und $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \infty$
Für $q < 1$:

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + q + a^2 + a^3 + \ldots + q^n \quad | * q \\ qs_n &= \quad q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + q^{n+1} \quad subtrahieren \\ s_n - qs_n &= 1 - q^{n+1} \Rightarrow s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \end{aligned}$$

5. Kochsche Schneeflocke. Was ist der Umfang und die Fläche von S_n.

$$\begin{aligned} U_0 &= 3a \\ U_1 &= 3 * \frac{4}{3} a \\ U_n &= (\frac{4}{3})^n 3a \quad divergent \\ A_0 &= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \\ A_1 &= A_0 + 3 * \frac{1}{9} A_0 \\ A_2 &= A_0 + 3 * \frac{1}{9} A_0 + 3 * 4^1 * (\frac{1}{9})^2 A_0 \\ A_n &= A_0 + (\sum_{i=1}^{n} 4^{i+1} (\frac{1}{9})^i) 3A_0 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \frac{2}{5} a^2 * \sqrt{3}$$

weitere Beispiele

1. Harmonische Reihe.
   Harmonische Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$$

   (s_n) ist nicht konvergent!
   Warum?

$$\begin{aligned} s_{2^{k-1}} &= 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + \ldots + (\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2}(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + \ldots + (\frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} \\ &= \frac{k+3}{2} \end{aligned}$$

   (s_n) wächst in $\ln n$. Das Ding wächst aber extreeeeeeem laaaaangsam. Es ist z.B. $s_{10000} = 9,78$.
   Bemerkung: Summe aller $\frac{1}{n}$ mit n hat keine 0 in Dezimaldarstellung:

$$\begin{aligned} &\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{9}} + \underbrace{\frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{99}} \\ \leq& 9 * 1 + 9^2 \frac{1}{10} + 9^3 \frac{1}{100} + \ldots \\ =& 9 * \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n = 9 * \frac{1}{1 - \frac{9}{10}} = 90 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} s_n &= \sum k = 0^n \frac{1}{k!} \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

   s_n ist monoton wachsend und von oben beschränkt.

$$\begin{aligned} s_n &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2*2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} \\ s_n &< 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Der Grenzwert existiert und ist ≤ 3.

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}, \quad e \approx 2,7183$$

3. $(c_n) = (1 + \frac{1}{n})^n$ existiert $\lim\limits_{n \to -\infty} c_n$?
monoton wachsend:
$$\begin{aligned}
\frac{c_n}{c_{n-1}} &= \frac{(n+1)^n (n-1)^{n-1}}{n^n n^{n-1}} \\
&= \frac{n(n+1)^n (n-1)^n}{(n-1)n^{2n}} \\
&= \frac{n}{n-1} \frac{(n^2-1)^n}{n^{2n}} = \frac{n}{n-1}(1 - \frac{1}{n})^n \\
&\underset{Bernulli}{\leq} \frac{n}{n-1}(1 - \frac{n}{n^2}) = \frac{n}{n-1} \frac{n-1}{n} = 1
\end{aligned}$$
beschränkt:
$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} &= \frac{n*(n-1)\dots(n-k+1)}{k! n^k} = \frac{1}{k!}(\frac{n-1)}{n})(\frac{n-2}{n})\dots(\frac{n-k+1}{n}) \\
&= \frac{1}{k!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})\dots(1 - \frac{k-1}{n}) \leq \frac{1}{k!}
\end{aligned}$$
also
$$c_n = (1 - \frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}}_{\to e}$$

$\Rightarrow$ Grenzwert existiert und ist $\leq e$
Zeige $\lim\limits_{n \to -\infty} c_n = e$. Wähle $N > 0$ fest. $\forall n > N$:

$$\begin{aligned}
c_n = (1 - \frac{1}{n})^n &> \sum_{k=0}^{N} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})\dots(1 - \frac{1-ks}{n}) \\
&\geq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}(1 - \frac{N}{n})^N
\end{aligned}$$

Sei $b_n = \lim\limits_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}(1 - \frac{N}{n})^N = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}$

$$\underbrace{b_n}_{N \to \infty : e} = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \leq c_n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \underbrace{b_n}_{n \to \infty : e}$$

Damit muss c_n auch gegen e gehen!

Eine Anwendung findet sich hier bei den Exponentialfunktionen:

$$x \in \mathbb{R},\ e^x = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$$

Rechne nach, dsss $\lim$ immer existiert! Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden $n > |x|$.

1. Fall $x \leq 0$. Dann ist $0 < 1 + \frac{x}{n} < 1$. Daraus folgt $0 < (1-\frac{x}{n})^n < 1$
Also ist das beschränkt! Und auch monoton fallend, also existiert der $\lim$.

2. Fall $x > 0$ Wir wissen schon die Konvergenz von $(1-\frac{x}{n})^n = b$ wegen Fall 1.
Für die Folge: $(a_n * b_n)_{n>1}$

$$a_n = (1-\frac{x}{n})^n$$
$$a_n * b_n = (1-\frac{x}{n})^n(1-\frac{x}{n})^n = (1-\frac{x^2}{n^2})^n$$
$$\underbrace{1}_{n\to\infty:1} \geq a_n b_n \underbrace{\geq}_{Bernulli} \underbrace{1-\frac{x^2}{n}}_{n\to\infty:1}$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n b_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim b_n}$$

Anwendung: Sei c_n der Faktor, um den sich das Kapital erhöht bei Zinssatz von 100%.

jährlich $c_1 = (1+1)^1 = 2$

monatlich $c_{12} = (1+\frac{1}{12})^{12} = 2,613$

täglich $c_{365} = (1-\frac{1}{365})^{365} = 2,714$

minütlich $c = () = 2,718$

Die alternierende harmonische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

Benutzen das Cauchy-Kriterium: $\forall\epsilon > 0 \exists n_0 \forall n, m > n_0 : |s_n - s_m| < \epsilon$

$$
\begin{aligned}
s_{n-k} - s_m &= (-1)^n(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n-k} \\
\text{k gerade } &(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2})(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4})\ldots(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}) \\
\text{k ungerade } &(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2})(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4})\ldots(\frac{1}{n+k-2} - \frac{1}{n+k-1}) + \frac{1}{n+k} \\
s_{n+k} - s_n &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + (-1)^{k+1}\frac{1}{n+k} \\
&= \frac{1}{n+1} - (\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}) - (\ldots)\ldots \\
&< \frac{1}{n+1}
\end{aligned}
$$

1 Beschreibung des asymptotischen Wachstums von Funktionen

Auch als O-Notation oder Landau-Symbole bezeichnet.

Motivation Komplexität von Algorithmen, also das Messen des Ressourcenverbrauchs wie Zeit, Speicher etc. soll gemessen werden. Wie macht man das?

- experimentell: Man nehme einen konkreten Rechner, einen konkrete Implementierung usw. und dann misst man die CPU-Zeit bei konkreter Instanz.
  Das Problem ist hier, welche konkrete Instanz man nimmt (benchmark-Probleme oder zufällige Instanzen). Der Nachteil ist hierbei, dass diese Variante Instanz- und System abhängig ist.

- Betrachtung idealisierten Rechner: RAM (Random Access Machine) mit Satz von Elementaroperationen

  - Untersuche Ressourcenverbrauch in Abhängigkeit von Eingabegröße

  Formal P sei ein algorithmisches Problem. Und A_P sei ein Algorithmus, der jede Instanz I von P auf RAM löst. $|A_P(I)|$ ist die Anzahl der Elementaroperationen.

  $$|A_P(n)| = \max_{|I|=n} |A_P(I)| \quad \text{“worst-case” bei Eingabegrößen}$$

  Man erwartet $|A_P(n)| \to \infty$ mit $n \to \infty$. Wir wollen beschreiben, wie schnell geht das?

1.1 O-Notation

Im folgenden gilt $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$.

1. Die Funktion g ist eine obere Schranke für die Funktion f, falls

   $$\exists c > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 : f(n) < c * g(n)$$

   Die Notation hierfür ist $f(n) = O(g(n))$

2. Die Funktion g ist untere Schranke für f, falls

   $$\exists c > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 : f(n) > c * g(n)$$

   Notation: $f(n) = \Omega(g(n))$

3. Funktionen g und f wachsen asymptotisch gleich schnell. (Notation: $f(n) = \Theta(g(n))$) falls

   $$f(n) = O(g(n)) \wedge f(n) = \Omega(g(n))$$

   d.h. $\exists c_1, c_2 > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 : c_1 * g(n) < f(n) < c_2 * g(x)$

1.2 Obere und untere Komplexitätsschranken

Definition 1. • *P algorithmisches Problem. $f(n)$ ist obere Schranke für die Komplexität von P, falls*

$$\exists \text{ RAM-Algorithmus } A_P \text{ für } P \text{ und } |A_P(n)| = O(f(n))$$

• *$f(n)$ ist untere Schranke für die Komplexität von P, falls*

$$\forall \text{ RAM-Algorithmus } A_P \text{ der } P \text{ löst } |A_P(n)| = \Omega(f(n))$$

Übung

1. $f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow$ Folge $(\frac{f(n)}{g(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.
   Beweis:

   $\Rightarrow$ $\exists c > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 : f(n) < c * g(n)$ Also $\frac{f(n)}{g(n)} < c$. Damit ist die Folge $(\frac{f(n)}{g(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ beschänkt durch $\max\{c_1 \frac{f(1)}{g(1)} \dots \frac{f(n)}{g(n)}\}$

   $\Leftarrow$

2. $f(n) = \Omega(g(n)) \Leftrightarrow$ Folge $(\frac{g(n)}{f(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt

Beispiel

1. Konstante Funktion $f(n) = 2^{1000}$. $f(n) = O(1)$.
   $\forall n : \underbrace{2^{1000}}_{=f(n)} < 2^{1001} * \underbrace{1}_{=g(n)}$

2. $\forall c > 0 : f(n) = \Theta(c * f(n))$

3. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0 : f(n) = (n + a)^n$. $f(n) = \Theta(n^b)$
   Beweis: $f(n) = O(n^b)$. Setzte $c = 2^b$.

$$\begin{aligned} &(n + a)^b \leq c * n^b \\ \Leftrightarrow\ &(n + 2)^b \leq (2n)^b \\ \Leftrightarrow\ &(n + 2) \leq 2n \end{aligned}$$

   erfüllt für $n \geq n_0 = 2|a|$
   $f(n) = \Omega(n^b)$. Setzte $c = 2^{-b}$.

$$\begin{aligned} &(n + a)^b \geq cn^b \\ \Leftrightarrow\ &n + a \geq \frac{n}{2} \end{aligned}$$

   für $n > n_0 = 2|n|$

1.3 Häufig auftretende Funktionen

$f(\ldots)$	
1	konstanter Aufwand
$\log_2 \log_2 n$	
$\log_2 n$	Binärsuche
$\sqrt{n}$	primitiver Primzahltest, planaren Graphen
n	linearer Aufwand
$n * \log_2 n$	Mergesort, untere Schranke für vergleichsbasiertes Sortieren
n^2	quadratischer Aufwand, z.B. Quicksort im worst-case
n^3	kubischer Aufwand
n^k, $k > 1$	polynomieller Aufwand -> "effizient"
2^n	exponentieller Aufwand, Größe der Potenzmenge einer n-Menge
$n!$	Anzahl aller Permutationen
n^n	Anzahl aller Funktionen $A \to A$, $\lvert A \rvert = n$
Summen	Hintereinanderausführung
Produkte	Verschachtelung

Asymptotisch echt schnelleres bzw. langsameres Wachstum

Definition 2 (o und ω). $f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \forall c > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 : f(n) < c * g(n) \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to \infty}(\frac{f(n)}{g(n)}) = 0$
Dann heißt g starke obere Schranke von f
$f(n) = \omega(g(n)) \Leftrightarrow \forall c > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 : f(n) > c * g(n)$

ACHTUNG!! Es gibt Funktionen, die nicht vergleichbar sind bzgl. der O-Notation!!

1 Fortsetzung O-Notation

Der Zweck ist die Beschreibung des asymptotischen Wachstums bei $n \to \infty$ von Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, d.h. wir suchen eine einfachere Funktion, die das gleiche Wachstum hat. Und das so einfach wie möglcih und so klein wie möglich!

Anmerkung Eigentlich $O(g(n) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} | \exists c > 0 \dots\}$. Es müsste also auch $f(n) \in O(g(n))$ heißen.

$$\begin{aligned}
1 &= o(\log\log n) \\
\log\log n &= o(\log n) \\
\log n &= o(\sqrt{n}) \\
\sqrt{n} &= o(n) \\
n &= o(n^2) \\
n^2 &= o(2^n) \\
2^n &= o(n!) \\
n! &= o(n^n)
\end{aligned}$$

1.1 Kochrezepte

1. $d(n) = O(f(n))$ und $h(n) = O(g(n))$. Dann gilt: $d(n)+h(n) = O(f(n)+g(n))$. Gilt natürlich auch für die Multiplikation.

2. Logarithmen, $a > 1, b > 0$

   $$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, c > 1$$

   - Insebesondere folgt daraus $\log_a n = \Theta(\log_c n)$
   - $\log_a(n^2) = 2 * \log_a n$
     $\log_a(n^c) = c * \log_a n$
   - $a^{\log_2 n} = (2^{\log_2 a})^{\log_2 n} = 2^{\log_2 a * \log_2 n} = (2^{\log_2 a})^{\log_2 n} = n^{\log_2 a}$

3. $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow \log_a(f(n)) = O(\log_a g(n))$

$$
\begin{aligned}
\forall n > n_0 : f(n) &< c * g(n) \\
\Rightarrow \log_a f(n) &< \log_a(c * g(n)) \\
\Rightarrow \log_a f(n) &< \log_a c + \log_a g(n) \\
&< c' \log_a g(n) \\
c' &= (\log_a c) + 1
\end{aligned}
$$

Logarithmieren erhält im Allgemeinen nicht starke obere Schranken!

$$f(n) = \sqrt{n}, \quad g(n) = n \text{ aber } \log \sqrt{n} = \frac{1}{2} \log n, \ \log n = \log n$$

4. $a, b > 0$
   - Höhere Potenz wachsen echt schneller! $a < b \Rightarrow n^a = o(n^b)$
   - Jedes Polynom in n wächst echt asymptotisch schneller als jedes Polynom in $\log n$

     $$(\log_a n)^b = o(n^a)$$

   - Jedes asymptotische Wachstum ist schneller als jedes polynomielle Wachstum.

     $$n^b = o(2^{a*n})$$

5. Sterling-Formel zum Abschätzen von n-Fakultät.

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^{n + \frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n^2})}$$

$\log_2(n!) = \Theta(n * \log_2 n)$ Warum ist das so? Wir schätzen nach oben und unten ab:

$$
\begin{aligned}
&(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}} < 1 * 2 * 3 * \ldots * (n-1) * n < n^n \quad |\log_2 \\
&\underbrace{\frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2}}_{=\Theta(n \log_2 n)} < \log_2(n!) < \underbrace{n * \log_2 n}_{=\Theta(n \log_2 n)} \\
&\Rightarrow \log_2(n!) = \Theta(n \log_2 n)
\end{aligned}
$$

2 Stetigkeit von Funktionen

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oder $f : I \to \mathbb{R}$, wobei I ein Intervall in $\mathbb{R}$ ist. Wir betrachten $a \in I \cup \{-\infty, \infty\}$ Untersuchen Verhalten von $f(n)$ für $x \in \infty$!

Definition 1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall$ *Folgen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $x_n \neq a$: $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x_n) = b$.

linksseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ also alle $x_i < a$.
rechtsseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ also alle $x_i > a$.

Beispiel

1. $f(x) = x^2 \quad \forall a \in R \lim\limits_{x\to a} f(x) = a^2$

2. Die Sprungfunktion hat in null keinen Grenzwert

$$f(x) = \begin{cases} 0 x < 0 \\ 1 x > 0 \end{cases}$$

   Da $\lim\limits_{x\to\infty} f(\frac{-1}{x}) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(\frac{1}{x}) = 1$

3. $f(x) = \sin\frac{1}{x}, x \neq 0$. hat in 0 weder links- noch rechtsseitigen Grenzwert!
   Was ist aber mit $g(x) = x * \sin\frac{1}{x}$? $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$

2.1 Bestimmung von Grenzwerten

1. Grenzwertarithmetik $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b, \lim\limits_{x\to a} g(x) = c, \quad b, c \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c$$
$$\lim_{x\to a}(g(x) * g(x) = b * c$$
$$c \neq 0 \ \lim_{x\to a}\frac{f(g)}{g(x)} = \frac{b}{c}$$

2. Umformen von Funktionen durch kürzen und erweitern

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{2}$$

3. Einschnüren. $g(x) < f(x) < h(x) \quad \forall x$

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = b \Rightarrow \lim_{x\to a} = b$$

Beispiel $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} =?$ Wir vermuten, dass der Limes 1 ist.
$\sin x \cos x f < x < \tan x \quad | : \sin x \Rightarrow \cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$

Zur Übersicht und Wiederholung, es gibt folgende Möglichkeiten zur Grenzwertbestimmung:

1. Grenzwertsätze
2. Funktionsterme umformen
3. Einschnüren von Funktionstermen
4. Monotoniekriterium
5. L'Hopital-Regel
6. Reihendarstellung

1 Asymptoten

$y = f(x)$ Funktionsterme (Graph der Funktion).
Asymptoten sind Geraden, an die sich die Funktionskurve anschmiegt.

Definition 1 (Asymptoten). *Die Gerade $y = c$ ist eine horizontale Asymptote der Funktion f, wenn*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c \quad oder \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = c$$

Die Gerade $x = a$ ist eine vertikale Asymptote der Funktion f, wenn

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad oder \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Die Gerade $y = ax + b, a \neq 0$ ist schräge Asymptote von f, wenn

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - ax - b) = 0 \quad oder \quad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - ax - b) = 0$$

Beispiele $f(x) = \frac{x(x-1)}{x+1}$
$f(x)$ hat eine vertikale Asymptote $x = -1$ und dazu eine schräge Asymptote $y = x-2$.
-1 ist Nullstelle von $x + 1$. $\lim\limits_{x\to-1^+} \frac{x(x-1)}{x+1} = +\infty$
Polynomdivision

$$\begin{array}{l} \big(\;\; x^2 \;\; - x\big) \div \big(x + 1\big) = x - 2 + \dfrac{2}{x+1} \\ \underline{-\, x^2 \;\; - x} \\ \qquad -\, 2x \\ \qquad \underline{\;\; 2x + 2} \\ \qquad\qquad\;\; 2 \end{array}$$

$\lim\limits_{x \to -1^+} (f(x) - (x-2)) = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{2}{x+1} = 0$

Allgemein für gebrochen rationale Funktionen $f = \frac{p(x)}{q(x)}$ in gekürzter Darstellung ($ggT(p(x), q(x)) = 1$) gilt

- Falls $deg\ p(x) = deg\ q(x) + 1$, dann hat f eine schräge Asymptote die man durch Polynomdivision berechnen kann.
- Ist $deg\ p(x) \geq deg\ q(x) + 2$, dann gibt es keine schrägen oder horiontalen Asymptoten.
- Falls $deg\ p(x) = deg\ q(x)$, dann gibt es eine horizontale Asymptote. Kann natürlich auch über Polynomdivision berechnet werden, geht aber auch einfacher: Für $p(x) = a_n x^n + \ldots$ und $q(x) = b_n x^n + \ldots$ ist die Gerade $y = \frac{a_n}{b_n}$
- Falls $deg\ p(x) < deg\ q(x)$, dann ist die Gerade $y = 0$ eine horizontale Asymptote.
- Jede Nullstelle von $q(x)$ definiert eine vertikale Asymptote.
  Sei a eine k-Fache Nullstelle von $q(x)$, also ein k-facher Pol und
  - k gerade, dann ist $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$
  - k ungerade, dann ist $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

2 Der Stetigkeitsbegriff

Definition 2 (stetig). *$I \subseteq R$ Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt stetig auf I, falls für alle Folgen (x_n) aus I mit $\lim\limits_{x \to \infty} x_n = a$ existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x \to \infty} f(x_n)$ und ist gleich $f(n)$.*
f heißt stetig auf I, wenn f in jedem $a \in I$ stetig ist.

Achtung Wenn a ein Intervallrand ist, dann einseitiger Funktionsgrenzwert.

Satz 1 (Epsilon-Delta). *f ist stetig in a genau dann wenn*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall a \in I : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Beweis 1.

$\Leftarrow$ $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall a \in I : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$ *gilt also soll daraus f stetig in a folgen. (x_n) mit $\lim\limits_{x \to \infty} x_n = a$. Zu zeigen: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x_n) = f(a) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 : |f(x_n) - f(a)| < \epsilon$.*
Sei $\delta = \delta(\epsilon)$.

$\lim\limits_{x\to\infty} x_n = a \Rightarrow \forall\epsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 : |x_n - a| < \epsilon$. *Setzte nun* $\epsilon = \delta$. *Wir bekommen also ein* n_0. *Verwende dieses* n_0 *in* $\forall\epsilon > 0\exists n_0 \forall n > n_0 : |f(x_n) - f(a)| < \epsilon$. *Sei* $n > n_0$. $|n_0 - a| < \delta \Rightarrow |f(n_0) - f(a)| < \epsilon$ $\square$

$\Rightarrow$ *Indirekter Beweis. Wir zeigen* $\neg(\forall\epsilon > 0\exists\delta > 0\forall a \in I : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon) \Rightarrow f$ *ist nicht stetig in* a, *d.h.* $\exists(x_n)$ *mit* $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = a$ *und* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_n) \neq f(a)$
$\neg(\forall\epsilon > 0\exists\delta > 0\forall a \in I : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon)$: $\exists\epsilon > 0\forall\delta > 0\exists x \in I : |x - a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| > \epsilon$. *Wir setzten für* δ $\frac{1}{n}$ *ein.* $\delta = \frac{1}{n} \Leftrightarrow x_n \in I |x_n - a| < \frac{1}{n} \wedge |f(x) - f(a)| > \epsilon$
$(x_n) : \lim\limits_{x\to\infty} x_n = a$, *aber alle* $f(x_n)$ *liegen außerhalb* $U_\epsilon(f(a))$ *Daraus folgt* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_n) \neq f(a)$ $\square$

$f(x)$ ist stetig auf I. $\forall a \in I \forall\epsilon > 0\exists\delta > 0\forall a \in I : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$.
f ist gleichmäßig stetig auf I, falls $\forall\epsilon > 0\exists\delta > 0\forall a \in I \forall x \in I : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$

1 Fortsetzung Stetigkeit

Beispiel $f(x) = \frac{1}{x}$ für $I = (0, \infty)$. Es soll gezeigt werden, dass f nicht gleichmäßig stetig ist.
Zu zeigen: $\exists \epsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x_1, x_2 \in I : |x_1 - x_2| < \delta \wedge |f(x_1) - f(x_2)| \geq \epsilon$
Man wählt $\epsilon = 1$. Sei $\delta > 0$ gegeben. $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} < \delta$. Man setzt $x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{1}{n+1} \in I$. Nach Konstruktion: $|x_1 - x_2| < \delta$, aber $|f(x_1) - f(x_2)| = |n - (n+1)| = 1 \geq \epsilon$.

Satz 1. *Ist $I = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$, dann ist f gleichmäßig stetig auf $[a, b]$.*

Den Beweis können wir hier nicht führen, aber man könnte ihn über die Kompaktheit im abgeschlossenen Intervall machen.

1.1 Stetige Ergänzung

Ist f definiert auf $I \backslash \{a\}$ und stetig auf diesem Bereich und $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existiert, dann kann man diese Funktion durch eine "stetige Ergänzung"

$$f(a) := \lim_{x \to a} f(x)$$

zu einer stetigen Funktion auf I machen.

Beispiel $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ist definiert auf $\mathbb{R} \backslash \{0\}$. Wir wissen, dass $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Die Ergänzung ist dann $f(0) = 1$.

1.2 Eigenschaften stetiger Funktionen

- f, g stetig in $a \in I$
  $f \pm g$ stetig in a, $f * g$ stetig in a und $\frac{f}{g}$ stetig in a, wenn $g(a) \neq 0$
- Die Komposition stetiger Funktionen ist auch stetig
  $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $f \circ g$ definiert durch $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. g stetig in a und f stetig in $g(a)$. Daraus folgt $f \circ g$ stetig in a.
  Beweis: $x_1 \to a \Rightarrow g(x_1) \to g(a) \to f(g(x_1)) \Rightarrow f(g(a))$ □
- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$.
  - Nullstellensatz
    Ist $f(a) * f(b) < 0$, d.h. f hat in a und b verschiedene Vorzeichen, dann folgt $\exists x_0 \in (a, b) : f(x_0) = 0$.

- Zwischenwertsatz
  Zu jedem c mit $f(a) < c < f(b)$ $\exists x_0 \in (a,b) : f(x_0) = c$.
- Minimum-Maximum-Eigenschaft
  $\exists x_1, x_2 \in [a,b] : f(x_1) = \min\{f(x)|x \in [a,b]\}$ und $f(x_2) = \max\{f(x)|x \in [a,b]\}$
  Korrular: f ist beschränkt auf $[a,b]$.
- Stetigkeit der Umkehrfunktion
  Ist f auf $[a,b]$ streng monoton wachsend oder fallend, dann existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : f([a,b]) \to [a,b]$ und f^{-1} ist stetig auf $f([a,b])$.

2 Differentiation

Newton, Leibniz.

Voraussetzung $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall oder Vereinigung von nichttrivialen Intervallen.

Definition 1 (Differenzierbarkeit). *$f : I \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in $x_0 \in I$, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert.*
Dieser Limes wird Ableitung von f im Punkt x_0 genannt und mit $f'(x_0)$ bezeichnet.
Die Funktion f heißt differenzierbar auf I, wenn $f'(x_0)$ für alle $x_0 \in I$ existiert. In diesem Fall kann f' als Funktion von I mit $\mathbb{R}$ betrachtet werden.

$x - x_0 = \Delta x = h$

$$\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{Differenzenquotiont} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}_{Differentialquotient} Ableitung$$

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx}(x)$$

Beispiel $f(x) = x^2$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x-\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x * \Delta x - \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \lim_{\Delta x \to} \Delta x = 2x$$

$$g(x) = x^n \to g'(c) = n * x^{n-1}$$

Die Funktion $f(x) = |x|$ ist im Punkt $x_0 = 0$ nicht differenzierbar:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \begin{cases} 1 & \text{für } \Delta x > 0 \\ 0 & \text{für } \Delta x < 0 \end{cases}$$

Grenzwert für $\Delta x \to 0$ existiert nicht. Dies ist ein Beispiel für Funktionen, die stetig aber nicht differenzierbar sind.

Satz 2. *Ist f differenzierbar in x_0, dann ist f auch stetig in x_0.*

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = 0$$

1 Fortsetzung Differentiation

1.1 Geometrische Interpretation

Hier ist $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ gerade die Gerade durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$. Der Anstieg dieser Sekante ist gerade $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Die Gleichung der Tangente durch $(x_0, f(x_0))$ ist $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

Anwendung Newton-Verfahren zur Nullstellenapproximation.
Sei x^* die Vermutete Nullstelle und x_1 ein Punkt in der Umgebung.
Iteration:

$$f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_1) = 0$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Beispiel $f(x) = x^2 - a$
$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$

1.2 Analytische Interpretation

- Die Tangentengleichung ist "einfach", d.h. linear und hat die Form $a + bx$
- Gleicher Funktionswert in x_0
- Gleiche Steigung wie f in x_0

$$f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0) = \underbrace{((f(x_0) - f(x_0)x_0)}_{=a} + \underbrace{f'(x_0)}_{=b} x$$

- "gute" Approximation von f in Umgebung von x_0
  "Rest"

$$\begin{aligned}
R(x) &= f(x)(f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)) \\
&= f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) \\
\lim_{x\to x_0} \frac{R(x)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \\
&= f'(x_0) - f'(x_0) = 0
\end{aligned}$$

1.3 Rechenregeln

Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

- $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- Produktregel
$$(f(x) * g(x))' = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$$
Insbesondere $(c * f(x))' = c * f'(x)$
- Quotientenregel
$$(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Beweis 1 (Produktregel). *Wir addieren eine geschickte 0.*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) + (f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} g(x_0)\frac{f(x - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= g(x_0)f'(x_0) + f(x_0) * g'(x_0)
\end{aligned}$$

Beweis 2 (Quotientenregel).

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) * \frac{1}{g(x)}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x)}}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{g(x_0)-g(x)}{g(x-g(x)}}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} -\frac{gx) - g(x_0)}{x - x_0} * \frac{1}{g(x)g(x_0} \\
&= \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2}
\end{aligned}$$

1.4 Ableitungen trigonometrischer Funktionen

$$\begin{aligned}
(\sin x)' &= \cos x \\
(\cos x)' &= -\sin x \\
(\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} \quad x \neq \frac{\pi}{2} * k\pi \\
(\cot x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x} \quad x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Beweis 3 (Sinus-Ableitung).

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x)\\ &= \lim_{h\to 0}(\sin x\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\frac{\sin h}{h}\\ &= 0+\cos x * 1 = \cos x\end{aligned}$$

Kettenregel Funktion $x \to f(g(x))$, wobei f, g differenzierbar.

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) * g'(x)$$

Beweis 4 (Kettenregel).

$$\frac{\Delta f(g(x))}{\Delta x} = \frac{\Delta f(g(x)) * \Delta(g(x))}{\Delta g(x)) * \Delta x}$$

1.5 Höhere Ableitung

Die Ableitung der Ableitung von f heißt, falls sie existiert, 2. Ableitung von f. Sie wird mit $f''(x)$ bezeichnet.
Allgemein schreibt man

$$\begin{aligned}&f^{(0)}(x) = f(x)\\ &f^{(1)}(x) = f'(x)\\ &f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}f^{(n-1)}(x) \quad , n \geq 1\end{aligned}$$

Definition 1.

- *f ist n-mal differenzierbar, falls $f^{(1)(x)}, \ldots, f^{(n)}(x)$ existieren.*
- *f ist n-mal stetig differenzierbar, falls $f^{(1)(x)}, \ldots, f^{(n)}(x)$ existieren und stetig sind.*

Beispiele

1. $f(x) = (\sin(x^3+2x)^2)^3$

$$f'(x) = 3(\sin(x^3+2x)^2)^2 * \cos(x^3+2x)^2 * 2(x^3+2x) * (3x^2+2)$$

2. $p(x) = 3x^5 - 4x^3 + 2x + 1$

$$\begin{aligned} p'(x) &= 15x^4 + 12x^2 \\ p''(x) &= 60x^3 + 24x \\ P'''(x) &= 180x^2 + 24 \\ p^{(4)}(x) &= 360x \\ p^{(5)}(x) &= 360 \end{aligned}$$

3. $f(x) = x * |x|$

$$f'(x) = 2|x| \quad , \quad \text{ist in 0 nicht differenzierbar}$$

1.6 Anwendung

- Maxima/ Minima einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$. Man unterscheidet globale und lokale Minima/ Maxima
  Beispiel Definition des lokalen Maximum in $a \in I$.

  $$\exists \epsilon > 0 \forall b \in U_\epsilon(a) \cap I : f(b) \leq f(a)$$

  Kandidaten für mögliche Extremstellen von $f : I \to \mathbb{R}$:

  - Randpunkte des Intervalls
  - Nullstellen der Ableitung
    Sei x_0 Maximum. I ist offen. $\exists \epsilon > 0 U_\epsilon(x_0) \subset I$

    $$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0^-} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} &\geq 0 \\ \lim_{x \to x_0^+} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} &\leq 0 \end{aligned}$$

  - Stellen, an denen die Ableitung nicht definiert ist.

Satz 1 (Mittelwertsatz). *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, ist stetig und auf (a, b) differenzierbar, dann folgt*

$$\exists x \in (a, b) : f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

D.h. der durchschnitliche Anstieg wird mindestens an einer Stelle angenommen.

Beweis 1. *Definieren eine neue Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$. $g(x) = f(x) - (x - b)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Es gilt $g(a) = f(a)$ und $g(b) = f(b)$ und g ist stetig. Daraus folgt, es existiert eine Extremalstelle $x_0 \in (a, b)$ für g. Also $g'(x_0) = 0 \Rightarrow 0 = f(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Und das ist $f(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

1 Was lernt man aus f' für f ?

- $f'(x) > 0$ f ist streng monoton steigend auf I.
- $f'(x) \geq f$ ist monoton steigend.
- $f'(x) = 0$ f ist konstant.

Korrolar f, g differenzierbar auf I. $f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + c$.

Beweis 2. *Funktion $h(x) = f(x) - g(x)$*

Beispiel $I = (-\infty, \infty)$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2} * 2x}{1+x^2} = \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} * x}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$$

Somit ist die Funktion also streng monoton steigend.

Fakt 1 f auf (a, b) differenzierbar und hat in x_0 ein Maximum, falls $\exists \epsilon > 0 : f'(x) > 0$ für $x \in (x - \epsilon, x_0)$ und $f'(x) < 0$ für $x \in (x_0, x + \epsilon)$.

Fakt 2 f auf (a, b) zweimal stetig differenzierbar und $f'(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in (a, b)$

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ ist ein lokales Maximum

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ ist ein lokales Minimum

Beweis 3. *$f'(x_0) < 0$ daraus folgt $f'(x) < 0$ in kleiner Umgebung von x_0. Das heißt $f'(x)$ ist in Umgebung monoton fallend, und daraus folgt wegen $f'(x_0) = 0$ ein Vorzeichenwechsel.*

2 Krümmungsverhalten / Wendepunkte

Der Wendepunkt wird im Vorzeichen von f'' abgelesen.

$f'' > 0 \Rightarrow y = f(x)$ konvex von unten (Linkskrümmung)

$f'' < 0 \Rightarrow y = f(x)$ konvex von oben (Rechskrümmung)

Definition 1 (Wendepunkt). *Im Wendepunkt von f wechselt die Krümmung.*

2.1 Kandidaten für Wendepunkte

- Punkte in denen f'' nicht existiert.
- Punkte bei denen $f''(x_0) = 0$

Satz 2 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz). *Seien f, g auf (a, b) differenzierbar und auf $[a, b]$ stetig. Falls $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a, b)$ dann folgt*

$$\exists x_0 \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Beweis 4. *Wir wissen $g(a) \neq g(b)$ wegen $g'(x) \neq 0$. Wir wählen uns wieder geschickt eine Funktion: $h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} * g(x)$*

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(a) \\ &= \frac{f(a)g(b) - f(a)g(a) - f(b)g(a) + f(a)g(a)}{g(b) - g(a)} \\ h(b) &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(b) \\ &= \frac{f(b)g(b) - f(b)g(a) - f(b)g(b) + f(a)g(b)}{g(b) - g(a)} \end{aligned}$$

$h(x) = g(b) \Rightarrow \exists x_0 : h'(x_0) = 0$ *Daraus folgt* $0 = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x_0)$ □

3 L'Hopital-Regeln

$f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $g'(x) \neq 0$. Falls $f(x) \to 0$ oder $f(x) \to \infty$ und $g(x) \to 0$ oder $g(x) \to \infty$ für $x \to b^-$ und $\lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ dann folgt

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Analog geht das für $x \to a^+$.

Beweis 5. Fall $x \to b^-$ $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ *für* $x \to b^-$. *Stetige Funktion von* f *und* g *auf* $(a,b]$ *und* $f(b) = g(b) = 0$. *Für jedes* $a < x < b$ *gibt es nach dem Mittelwertsatz ein* $x < x_0 < b$ *mit* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.
Wenn $x \to b^-$, *dann geht auch* $x_0 \to b^-$. *Dann ist* $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Beispiel

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{3x^2 - 7x - 6} = \lim_{x \to 3} \frac{3x^2 - 2x - 5}{6x - 7} = \lim_{x \to 3} = \frac{16}{11}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x \cos x + \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{\cos x - x \sin x + \cos x} = 0$$

4 Kurvendiskussion

Folgende Punkte gehören zu einer Kurvendiskussion

- maximaler Definitionsbereich
- Symmetrie
  - Gerade Funktion: $f(-x) = f(x) \forall x$
  - Ungerade Funktion: $f(-x) = -f(x) \forall x$
- Polstellen $f(x) = \frac{g(x)}{(x-x_0)^k}, g(x_0) \neq 0, g$ stetig. k gerade in x_0 dann kein Vorzeichenwechsel, andernfalls haben wir einen Vorzeichenwechsel.
- Verhalten im Unendlichen, Asymptoten
- Nullstellen
- Extremwerte, Monotonieintervalle
- Wendepunkte
- Skizze

5 Bestimmung von Nullstellen und Fixpunkten

$y = f(x), f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar.
Eine Nullstelle ist ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = 0$ und ein Fixpunkt ist ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = x$.

Beobachtung Nullstellen von $f(x)$ sind Fixpunkte von $g(x) = x - f(x)$ und die Fixpunkte von $f(x)$ sind die Nullstellen von $g(x) = x - f(x)$.

1 direkte Fixpunktiteration

Satz 1. $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ *ist stetig differenzierbar. Notation:* $f \in C^n[a, b]$. $\exists 0 \leq k < 1 \forall x \in [a, b] : |f'(x)| \leq k < 1$
Es folgt

- $\exists!$ *Fixpunkt* $x^* \in [a, b]$
- *Die Interationsfolge* $x_{n+1} = f(x_n)$ *konvergiert bei beliebigem Startwert gegen den Fixpunkt* x^*.
- $|x_n - x^*| \leq \frac{k}{1-k}|x_n - x_{n-1}|$

Beweis 1.

1. *Existenz von* x^*. *Falls* $f(a) = a$ *oder* $f(b) = b$, *dann sind wir fertig. Also* $f(a) > a \wedge f(b) < b$. *Wir betrachten* $F(x) = f(x) - x$ $F(a) > 0 \wedge F(b) < 0$. *Hieraus folgt es existiert eine Nullstelle in* F. *Und das bedeutet es gibt ein Fixpunkt* x^* *in* f. weiß nicht mehr wie
   Eindeutigkeit folgt aus dem Mittelwertsatz für Intervall.
2. $|x_n - x^*| = |f(x_n - f(x^*)|$ *ist nach dem Mittelwertsatz gleich* $|f'(v)||x_{n-1} - x^*| \leq k|x_{n-1} - x^*|$ *Daraus folgt* $|x_n - x^*| \leq k^n|x_0 - x^*|$. *Weil* $\lim_{x\rightarrow\infty} k^n = 0$ *ist* $\lim_{x\rightarrow\infty} x_n = x^*$.
3. $|x_{n-1} - x^*| = |x_{n-1} - x_n + x_n - x^*|$. $|x_n - x^*| \leq k * |x_{n-1} - x^*| \leq k|x_{n-1} - x_n| + k|x_n - x^*|$. $|x_n - x^*| \leq \frac{k}{1-k}|x_{n-1} - x_n|$ □

2 Newton-Verfahren

Ist zur näherungsweisen Bestimmung von Nullstellen da. $f(x) = 0$. Es benutz die Fixpunktiteration für $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Voraussetzug $f'(x_0) \neq 0$ auf $[a, b]$. $x_0 \in [a, b]$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Hinweis Es ginge auch $G(x) = x - f(x)$ oder so, aber Newton wie oben braucht schwächere Voraussetzungen.

Hinreichende Voraussetzung $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist zweimal stetig differenzierbar, $f'(x) \neq 0$ und ist konvex, d.h. die zweite Ableitung wechselt das Vorzeichen nicht. Die Vorzeichen von $f(a)$ und $f(b)$ seien verschieden. Dann konvergiert die Newton-Folge für beliebigen Startpunkt x_0 gegen die einzige Nullstelle x^*.

Beispiel $f(x) = x^2 - 2$.
$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$

n	x_n
0	1
1	1,5
...	
4	1,4142136

3 Taylor-Formel

$f(x) = (x - x_0)^n$ ist Polynom. Was sind die Ableitungen?

$$f'(x) = n(x - x_0)^{n-1}$$

$$f''(x) = n * (n-1)(x - x_n)^{n-2}$$

Was ist die k-te Ableitunge?

$$f^{(k)}(x) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k-1)(x - x_n)^{n-k}$$

$$f^{(n)}(x) = n!$$

Alle höheren Ableitungen sind dann 0.
An der Stelle x_0 ist nur die n-te Ableitung ungleich 0.

allgemeiner $f(x) = a_n(x - x_0)^n + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + \dots + a_1(x - x_0) + a_0$ für alle k ist $f^{(k)}(x_0) = a_k * k!$. Wir setzten $a_k = 0$ für $x > n$. Also ist $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$. Hieraus folgt

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Beispiel $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 6$ $f(x)$ soll an der Stelle $+2$ "entwickelt" werden. Also in der form $f(x) = \sum_{k=0}^{3} a_k(x-2)^k$

$$f(2) = 20$$
$$f'(2) = 19$$
$$f''(2) = 16$$
$$f'''(2) = 6$$

$$f(x) = \frac{20}{1} + \frac{19}{1}(x-2)^1 + \frac{16}{2}(x-2)^2 + \frac{6}{6}(x-2)^3 = 20 + 19(x-2) + 8(x-2)^2 + (x-2)^3$$

noch allgemeiner f sein eine beliebige n-fach differenzierbare Funktion. Wir betrachten

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \underbrace{R(x)}_{Rest}$$

Dies ist das n-te Taylor-Polynom von f im Entwicklungspunkt x_0. Daraus folgt, Funktionen und Ableitungen stimmen mit f im Punkt x_0 überein.

$n = 0$ $f(x) = f(x_0) + R_0(x)$. Wegen des Mittelwertsatzes ist $R_0(x) = f'(z)(x - x_0)$ für ein $z \in (x, x_0)$.

$n = 1$ $f(x) = f(x_0)+f(x_0)(x-x_0)+R_1(x)$ wegen Differenzenquotient $\lim_{x\to x_0} \frac{R_1(x)}{x-x_0} = 0$

Satz 2 (Taylor-Formel). *$f : I \to \mathbb{R}$ und sei f n-mal stetig differenzierbar und $x_0 \in I$. Dann gilt*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x) \text{ und}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Ist f $(n + 1)$-mal stetig differenzierbar, so ist

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

für $x \leq z \leq x_0$. Das ist das Lagrange Restglied.

3.1 Schlussfolgerung

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar und sei $x_0 \in (a, b)$. $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

- n ungerade: f hat in x_0 kein Extremwert
- n gerade, f hat in x_0 Extremwert und Vorzeiche von $f^n(x_0)$ entscheidet ob Maximum oder Minimum.

für x_0: $f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$. Weil $\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} \to 0$ für $x \to x_0$ wird von $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ das Vorzeichen von $f(x) - f(x_0)$ bestimmt. Wenn n ungerade, so gibt es einen Vorzeichwechsel, andernfalls keinen.

Beispiel $f(x) = x^3$. Dann ist $f'(0) = f''(0) = 0$ und $f'''(0) = 6$. 3 ist ungerade, also ist 0 kein Extremstelle!.
$f(x) = x^4$. Dann ist $f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = 0$ und $f^{(4)}(0) = 24$. Da 4 gerade ist, ist 0 eine Extremstelle.

Achtung Kriterium ist hinreichend aber nicht notwendig! Das wird deutlich bei

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{?}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Hier ist nämlich $\forall n : f^{(n)}(0) = 0$. Und trotzdem ist bei 0 ein Minimum.

Beweis 1.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x) \\ &= f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \\ \frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)^n} &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \underbrace{\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}}_{klein} \end{aligned}$$

n ungerade $\Rightarrow$ $(x-x_0)^n$ wechselt in Umgebung von x_0 das Vorzeichen. $\Rightarrow$ $f(x)-f(x)$ nicht verschieden??? n gerade $\Rightarrow$ $(x-x_0)^n$ wechselt nicht das Vorzeichen in Umgebung von x_0. $\Rightarrow$ Zahlen $f(x) - f(x_0)$ ändert das Vorzeichen nicht!.

Spezialfall

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(0)}{k!}x^k - R_n(x)$$

Beispiele

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x \\ f'(x) &= \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}) \\ f''(x) &= \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 2 * \frac{\pi}{2}) \\ f^{(k)}(x) &= \sin(x + k * \frac{\pi}{2}) \\ f^{(k)}(0) &= \sin(k\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0 & k = 2l \\ (-1)^k & k = 2l+1 \end{cases} \end{aligned}$$

Taylor-Polynom für $\sin x$

$$T_{2k+1}(x) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots + (-1)^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Taylor-Polynom von $\cos x$ mit Ableitung:

$$T_{2k+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

$f(x) = e^x$ und $f^{(k)}(x) = e^x$ und $f^{(k)}(0) = 1$

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

$f(x) = (1+x)^n, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} - \frac{n*(n-1)*(n-2)\ldots*(n-k+1)}{k!} &= \binom{n}{k} \\ f^{(n+1)}(k) &= 0 \\ (1+x)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + 0 \end{aligned}$$

Korrolar Für klieine x nahe 0 ist

$$\begin{aligned} \sin x - x &\approx -\frac{x^3}{6} \\ \cos x - 1 &\approx -\frac{x^2}{2} \\ e^x - 1 &\approx x \\ e^x - 1 - x &\approx \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

1 Umkehrfunktionen

Frage Wie löst man $y = f(x)$ nach x auf?

Definition 1. *$f : I \to \mathbb{R}$ und $D \subseteq I$. Dann ist f über D umkehrbar, wenn es zu jedem $y \in f(D)$ genau ein $x \in D$ gibt mit $f(x) = y$.*
Dies definiert die Umkehrfunktion $g : f(D) \to D$

Klar: Wenn g die Umkehrfunktion zu f ist, dann ist f die Umkehrfunktion von g. Man schreibt f^{-1}, aber Vorsicht, wenn man $(f(x))^{-1} = \frac{1}{f(x)}$ meint!

Satz 1. *1.*
- *Jede streng monotone Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist umkehrbar.*
- *Jede über einem Intervall I stetig differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$ für $x \in I$ ist über dem ganzen Intervall umkehrbar.*

2. Die Graphen von $y = f(x)$ und $y = g(x)$, g ist Umkehrfunktion von f, sind symmetrisch bezglich der Gerade $y = x$.

3. f umkehrbar und differenzierbar in I. $\forall x f'(g(x)) \neq 0 \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{f'(g(x)}$
Beweis: $f(g(x)) = x$ differenzieren: $f'(g(x) * g'(x) = 1 \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{f'(g(x)}$

1.1 Spezielle Umkehrfunktionen

1. $y = ax + b$ hat Umkehrfunktion $\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$

2. Wurzelfunktion mit rationalen Exponenten: $f(x) = x^n, x \in \mathbb{R}$. Wenn n gerade, dann ist's umkehrbar für $x \in \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$. Wenn n ungerade ist, dann ist f über ganz $\mathbb{R}$ umkehrbar.
   Für rationalen Exponenten: $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$. $x^{\frac{1}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^n$.
   Ableitung:

$$(x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n * x^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

3. trigonometrische Funktionen
   $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und $y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^1(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

   $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

   $\arctan x : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
   $arccot\ x : \mathbb{R} \to (0, \pi)$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$(arccot\ x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$$

1 Exponential- und Logarithmusfunktionen

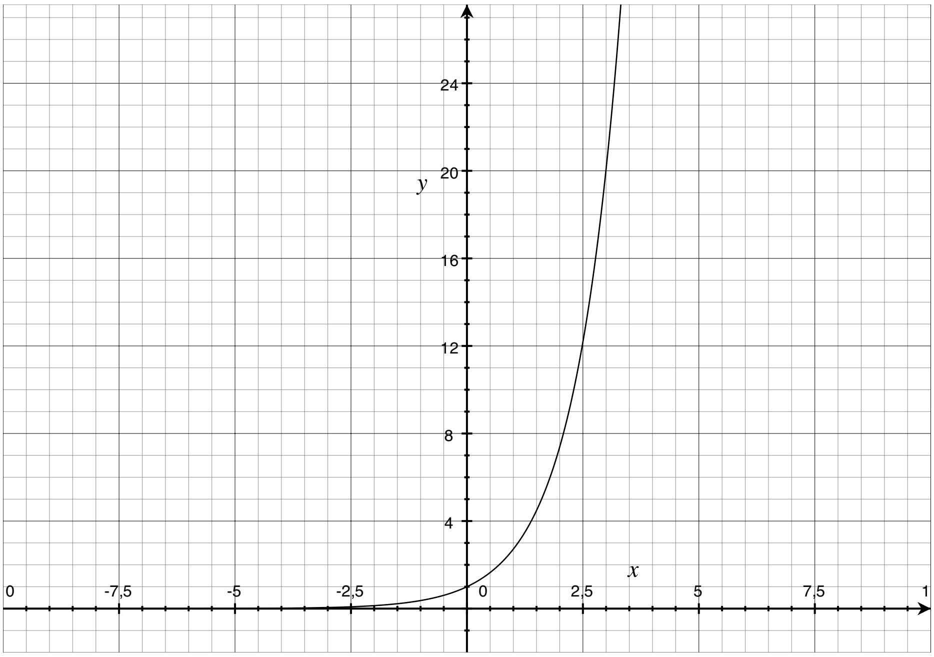
1.1 Die Exponentialfunktion e^x

$e^x = exp(x) = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$

1. $e^0 = 1, e^x > 0 \forall x$
2. $(e^x)' = e^x$
   Beweis:
   $$\begin{aligned}\frac{d}{dx}e^x &= \frac{d}{dx}(\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n) = \lim_{n\to\infty}(\frac{d}{dx}(1+\frac{x}{n})^n) = \lim_{n\to\infty}(n(1+\frac{x}{n})^{n-1} * \frac{1}{n}) \\ &= \lim_{n\to\infty}((1+\frac{x}{n})^n(\frac{1}{1+\frac{x}{n}})) = e^x * 1 = e^x\end{aligned}$$
3. Jede auf Intervall I differenzierbare Funktion $f(x)$ mit $f'(x) = a * f(x)$ ist von der Form $f(x) = c * e^{a*x}$ für eine Konstante c.
   Zunächst: $(e^x * e^{-x})' = e^x e^{-x} + e^x e^{-x}(-1) = 0 \Rightarrow e^x e^{-x} + c$ für eine Konstante c. Für $x = 0 : 1 * 1 = c$
   Jetzt können wir das Beweisen:
   Sei $f = af'$. Betrachte $g(x) = f(x) * e^{-ax}$. Dann ist
   $$\begin{aligned} g'(x) &= f(x)e^{-ax} - af(x)e^{-ax} \\ &= af(x)e^{-ax} - af(x)e^{-ax} = 0 \\ \Rightarrow g(x) &= c \text{ für ein } c \in \mathbb{R} \\ c &= f(x) * e^{-ax} \quad | * e^{ax} \\ \Rightarrow c * e^{ax} &= f(x) * e^{-ax}e^{ax} = f(x)\end{aligned}$$

Korollar $e^{x-y} = e^x e^y$.
Beweis: Fixiere $y \in \mathbb{R}$. $f(x) = e^{x-y} \to f_x - f_y \to f_y = c_y e^x$. für $x = 0$ folgt $x_y = e^y$.

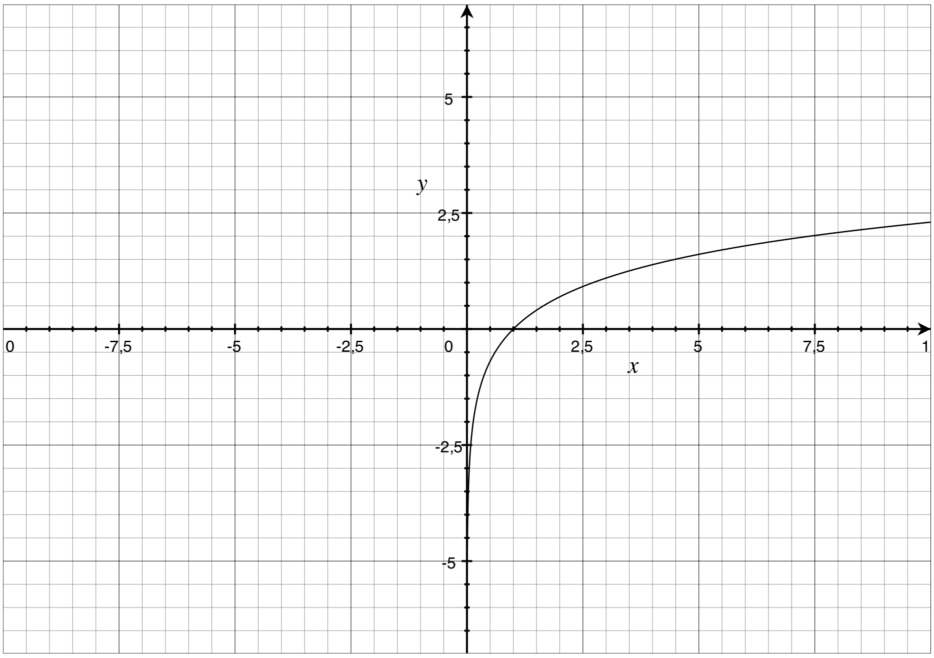
1.2 Kurve



- streng monoton wachsend
- links gekrümmt (konvexe Funktion)
- $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$
  $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$ für jedes $n \in \mathbb{N}$

1.3 Der natürliche Logarithmus $\ln x$

$exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^x$ streng monoton, deshalb existiert die Umkehrfunktion $\ln : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.



- $\ln 1 = 0$
- $\ln x < 0$ für $0 < x < 1$
- $\ln$ ist rechts gekrümmt
- $(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$

Korollar

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
   $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$
2. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} = 0$ für jedes n

1.4 Allgemeine Exponential- und Logarithmusfunktion

$a > 0, a \in \mathbb{R}$
$x = \ln a$, $a^r = (e^x)^r = e^{r \ln a}$

Rechenregeln $a^x * a = a^{x+1}$, $(a * b)^x = a^x b^x$, ??
$\ln a^x = x * \ln a$
$(a^x)' = a^x \ln a$
Umkehrfunktion zu a^x ist $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

2 Hyperbelfunktionen

Dies sind $\sinh, \cosh, \tanh \coth$. Wobei

$$\sinh = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \text{ und } \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

2.1 Kettenlinie

$y = a \cosh \frac{x}{a}$ hat den Scheitelpunkt bei $(?, a)$

2.2 Rechenregeln

$$\begin{aligned}
&-\sinh x = \sinh(-x) \\
&\cosh x = \cosh(-x) \\
&\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\
&\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\
&\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1
\end{aligned}$$

2.3 Ableitungen

$$\begin{aligned}
&(\sinh x)' = \cosh x \\
&(\cosh x)' = \sinh x \\
&(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}
\end{aligned}$$

Zur Erinnerung: $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}, \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ Dies schlägt sich in den Taylor-Reihen nieder

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots
\end{aligned}$$

Merke, es gibt eine enge Verwandtschaft zwischen Exponential- und trigonometrischen Funktionen.

$\sinh$ ist streng montoton steigend, deshalb existiert eine Umkehrfunktion (area sinus hyperbolikus).

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ nach x auflösen} \\
(e^x)^2 - 2ye^x - 1 &= 0 \\
\Rightarrow e^x &= -y + \sqrt{y^2+1} \\
x &= arcsinh\ y = \ln(y + \sqrt{y^2+1}) \\
y &= arccosh\ x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})
\end{aligned}
$$

1 Integration

1.1 Bestimmtes Integral (Riemann-Integrierbarkeit)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.
Durch das Integral kann die Fläche zwischen Funktionsgraph und x-Achse bestimmt werden.

Formal Man betrachte die Unterteilung Z von $[a, b]$.
$a = x_1 < x_2 < \dots x_n = b$. Wr ordnen hier noch die "Güte" von Z zu:

$$||Z|| = \max |x_{i+1} - x_i|$$

Z_1 ist feiner also Z_2, wenn Z_1 alle Zwischenpunkte von Z_2 enthält.
Für $Z_i \in [x_i, x_{i+1}] \to \sum_{i=0}^{n-1} f(z_i) * (x_{i+1} - x_i)$. Die nennt man Riemann-Summe.

Z sei so eine Zerlegung. Dann ist die Obersumme

$$0_f(Z) = \sum_{i=0}^{n-1} \sup f(z)(x_{i+1} - x_i), \quad z \in |x_i, x_{x+1}]$$

und die Untersumme

$$[U_f(Z) = \sum_{i=0}^{n-1} \inf f(z)(x_{i+1} - x_i), \quad z \in |x_i, x_{x+1}]$$

Was passiert bei Verfeinerung des Rasters?

- Obersummen fallen (schwach monoton)
- Untersummen steigen (schwach monoton)

Daraus folgt, es existiert ein Grenzwert der Untersummen:

$$\sup U_f(Z) := \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

Und natürlich existiert auch der Grenzwert der Obersummen:

$$\inf O_f(Z) := \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

Definition 1 (Riemannintegral). $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *heißt Riemannintegral, falls*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Beispiel

1. $f(x) = c$

$$\begin{aligned}\forall Z : U_f(Z) = O_f(Z) &= \sum_{i=0}^{n-1} c(x_{i+1} - x_i)\\ &= c\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)\\ &= c(b-a)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_a^b cdx = c(b-a)$$

2. $z \in [a, b]$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = z \\ 0 & sonst \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\forall Z : U_f(Z) &= 0\\ O_f(Z) &= 2 * ||Z||\end{aligned}$$

Bei Verfeinerung geht $||Z|| \to 0$. Deshalb ist $\inf O_f(Z) = 0$

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

3. Sprungfunktion von Dirichlet. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \cap [0, 1] \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\forall Z : U_f(Z) &= 0\\ O_f(Z) &= 1\end{aligned}$$

Diese Funktion ist also nicht Riemannintegrierbar

Definition 2. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *Riemann integrierbar und nicht negativ. dann heißt*

$$\int_a^b f(x)dx$$

die Fläche zwischen Kurve $f(x)$ und x-Achse.

Anmerkung

- f regulär, Fläche $\int_a^b |f(x)|dx$
- Formel: $b < a : \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

1.2 Eigenschaften der Riemannintegrale

1. Monotonie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$
$$\forall x : f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$
2. $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$
3. Linearität $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$
Beweis: $U_{f,g}(Z) > U_f(Z) - U_g f(Z)$. Wann gilt das?
$$\begin{aligned}\inf(f(z) - g(z)) * (x_{i+1} - x_i) &\geq \inf f(z)(x_{i+1} - x_i) + \inf g(z)(x_{i+1} - x_i)\\ &= \inf(f(z) - g(z) \geq \inf f(z) + \inf g(z)\end{aligned}$$
4. Zusammengesetze Intervalle. Sei $a \leq c \leq b$.
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Kriterium $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. f ist Riemann integrierbar genau dann wenn

$\forall \epsilon > 0 \exists Z : |O_f(Z) - U_f(Z) \leq \epsilon|$

Daraus folgt folgender Satz.

Satz 1. *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Sei f monoton, dann ist f Riemann integrierbar.*

Beweis 1. *f wachsend. Z äquidistante Zerlegung $x_i = a + \frac{i}{n}(b - a)$.*

$$\begin{aligned}O_f(Z) - U_f(Z) &= \sum_{i=0}^{n-1}(f(x_{i+1}) - f(x_i))(x_{i+1} - x_i)\\ &= \frac{b-a}{n} * \sum_{i=0}^{n-1}(f(x_{i+1}) - f(x_i))\\ &= \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))\end{aligned}$$

Dies geht für $n \to \infty$ gegen 0 !

Satz 2. *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Wenn f stetig ist, dann ist f Riemann integrierbar.*

Beweis 2. *f auf $[a, b]$ stetig, dann ist f gleichmäßig stetig auf $[a, b]$.*
Wähle $\epsilon > 0$, $\delta > 0$, so dass $|x - y| < \delta$. Daraus folgt $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}$. Wir wählen Z mit $||Z|| < \delta$.

$$\begin{aligned} O_f(Z) - U_f(Z) &= \sum_{i=0}^{n-1} (\sup f(x) - \inf f(x))(x_{i+1} - x_i) \\ &\leq \frac{\epsilon}{b-a}(x_{i+1} - x_i) = \frac{\epsilon}{b-a} * (b - a) \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

2 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Satz 3. *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig und nicht negativ.*

$$\exists z \in [a, b] : \int_a^b f(x)g(x)dx = f(z) \int_a^b g(x)dx$$

Beweis 3. *$m = \min f(x)$, $M = \max f(x)$. g ist nicht negativ. Es folgt*

$$m * g(x) \leq f(x) * g(x) \leq Mg(x)$$

Aus der Monotonie folgt

$$m * \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M * \int_a^b g(x)dx \ .$$

Also $\exists \mu \in [m, M] : \int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$. Da f stetig ist $\exists z : f(z) = \mu$. □

2.1 Anwendung von bestimmten Integralen

Volumenberechnung von Rotationskörpern. Wir lassen f umd die x-Achse rotieren. Die Fläche der Kreisscheibe bei x ist $A(x) = \pi(f(x))^2$
Cavalieri: $Vol = \int_a^b A(x)dx = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$

Beispiele Kreiszylinder, $f(x) = r$. Dann ist $V = \pi \int_a^b r^2 dx = \pi r^2 (b - a)$
Paraboloid. $f(x) = \sqrt{x}$. Dann ist $V = \pi \int_0^1 (f(x))^2 dx = \pi \int_0^1 x dx = \pi * \frac{1}{2}$

Ziel $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Finde eine Stammfunktion F für f mit

$$F'(x) = f(x)$$

Satz 4 (Haupsatz der Integral- und Differentialrechnung). $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ist stetig.*

1. $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *ist Stammfunktion von* $f(x)$.

2. *Ist* $F(x)$ *Stammfunktion von* $f(x)$, *so gilt:*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = F(x)]_a^b$$

Beweis des Hauptsatzes Sei $h \neq 0$, $x_0 = x + h \in [a, b]$.

$$\frac{1}{h}F(x+h) - F(x) - f(x) \text{ z.z. geht gegen null mit } h \to 0$$
$$=|\frac{1}{h}(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt) - \underbrace{\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dt}_{\frac{1}{h}f(x)\int_x^{x+h} 1dt = \frac{1}{h}f(x)h = f(x)} \quad |$$
$$=\frac{1}{|h|}|\int_x^{x+h}(f(t) - f(x)dt)|$$
$$\leq \frac{1}{|h|}|h| \sup\{|f(t) - f(x)|\} \to 0???$$

Hieraus folgt: Falls $F(x) = \int_a^x f(t)dt + c$ Stammfunktion von $f(x)$.

$$\begin{aligned} F(a) &= \int_a^x f(t)dt + c \\ F(b) &= \int_b^x f(t)dt + c \\ F(b) - F(a) &= \int_a^b f(t)dt + c - c \end{aligned}$$

□

Definition 1 (unbestimmtes Integral). *Die Menge der Stammfunktionen von f wird mit*

$$\int f(x)dx$$

bezeichnet und heißt unbestimmtes Integral.

1 Techniken zum Integrieren

Es gibt drei tolle Techniken, die hoffentlich einem bei der Kunst des Integrierens weiterhelfen.

- Partielle Integration
- Substitution
- Partialbruchzerlegung

1.1 Partielle Integration

$u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar.

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

dies kommt von der Produktregel der Differentialrechnung. welche da lautet $(u(x)v(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

Beispiele

1. $\int xe^x dx$. Wir sagen $x = u(x)$ und $e^x = v'(x)$. Dann folgt $x * e^x - \int e^x = (x-1)e^x + c$
2. $\int x^2 \sin x dx$. Wir sagen $v'(x) = \sin x$ und $u(x) = x^2$. Dann ergibt sich
$$-\cos x * x^2 + 2\int x \cos x dx$$
Jetzt muss weiter mit dem Integral weitergemacht werden: $\int x * \cos x dx = x * \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c$. Insgesamt ergibt sich
$$-\cos x * x^2 + 2x \sin x + 2\cos x + c$$
3. $\int \ln x dx = x * \ln x - \int x(lnx)'dx = x * lnx - x + c$, wenn man als zweite Funktion eine 1 nimmt.
4. $\int e^x \cos 2x dx = e^x \cos 2x + 2\int e^x \sin 2x dx = e^x \cos 2x + 2(e^x \sin 2x - 2\int e^x \cos 2x dx)$

1.2 Substitution

Da gibt es einen Haufen von Regeln für:

$$\frac{d}{dx}F(g(x) = F'(g(x) * g'(x)$$
$$\Rightarrow \int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + c$$

Für bestimmte Integrale:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

Und wieder ein paar Beipiele

Beipiele

1. $\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + c = \ln|g(x)| + c$ mit der Substitution $g(x) = t$ und $dt = g'(x)dx$

2. $\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^t dt = e^t + c = e^{\sin x} + c$ mit der Substitution $t = \sin x$ und $dt = \cos x dx$

3. $F(x) = \int \frac{e^{3x}}{e^{2x}-1}dx$. Mit $x = \ln t$ ergibt sich $dx = \frac{1}{t} * dt$ Dann haben wir $\int \frac{t^2}{t^2-1}dt = \int(1 - \frac{1}{t^2-1})dt = t + |\frac{t-1}{t+1}| + c = e^x + |\frac{e^x-1}{e^x+1}|$

1.3 Partialbruchzerlegung

Wir zum Integrieren von rationalen Funktionen benutzt.

$$\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$$

Wir schreiben mal das Polynom anders: $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$.

$$\frac{1}{x^2 + 5x + 6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x-2)}{(x-3)(x-2)} = \frac{(A+B)x - (3A - 2B)}{x^-5x - 6}$$

Wir bekommen also $A = -1$ und $B = 1$ raus. Hiermit folgt also insgesamt

$$-\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x-3} = -\ln|x-2| + \ln|x-3| + c$$

Das wird zum Glück aber nicht in der Klausur rankommen - puh!

2 Uneigentliche Integrale

Dies sind Integrale der Form

$$\int_a^\infty f(x)dx \; , \; \int_{-\infty}^a f(x)dx \; , \; \int_{-\infty}^\infty f(x)dx$$

oder Integrale unbeschränkter Funktionen z.B.

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

2.1 Unendliche Grenzen

$f : [a, \infty] \to \mathbb{R}$. Sei f ber jedem Intervall $[a, A]$ integrierbar. Falls

$$\lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x)dx$$

existiert und es gilt

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x)dx$$

Analog funktioniert das mit $\int_{-\infty}^a f(x)dx$. Daraus ergib sich

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx$$

Beispiele

1. $\int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx, s > 1$

$$\int_1^A \frac{1}{x^s}dx = \frac{1}{1-s} * \frac{1}{x^{s-1}} = \frac{1}{1-s}(A^{s-1} - 1) = \frac{1}{1-s}$$

2. $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = 2*\int_0^\infty \frac{1}{1-x^2}dx = \int_0^A \frac{1}{1-x^2}dx = \arctan x|_0^A$. Der Limes ist $\lim_{A\to\infty} \arctan A = \frac{\pi}{2}$. Die gesuchte Fläche ist also π.

3. $\int_0^\infty \cos x dx = \lim_{A\to\infty} \sin A$ ist divergent.

$f : (a, b]$ in a nicht definiert, aber f $\forall \epsilon : 0 < \epsilon < b - a$ intergrierbar über $[a + \epsilon, b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$$

falls existiert.

Beispiel $\int_0^1 \frac{1}{x^s}dx$ mit $0 < s < 1$

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{x^s}dx = \frac{1}{1-s}x^{1-s} = \frac{1}{1-s}(1 - \epsilon^{1-s} = \frac{1}{s}$$

Hinweis

1. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ existiert.
2. Eulersche Gamma-Funktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}, x < 0$$

$\Gamma(x+1) = x * \Gamma(x)$ vergleiche mit $n!$

1 Potenzreihen

Ziel: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ darstellbar als $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ mit $f_k(x)$ "einfach", d.h. hat z.B. die Form $f_k(x) = a_k x^k$ -> Paritalsumme.

Definition 1 (Cauchy-Kriterium für Reihen). $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *konvergent genau dann wenn* $\forall \epsilon > 0 \exists x_0 \forall n, m > n_0 : |s_n - s_n| < \epsilon$.

1.1 Rechenregeln

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = k = b$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k) = a \pm b$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} c * a_k = c * a$$

Vorsicht beim Klammern weglassen bzw. setzten! Und auch Vorsicht beim Umordnen der Glieder!

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$
$$\frac{1}{2} \ln 2 = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 \dots$$
$$\frac{3}{2} \ln 2 = 1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 \dots$$

Die ist eine Umordnung der Reihe!

Definition 2 (absolute Konvergenz). $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *heißt absolut konvergent, falls*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

konvergent ist.

1.2 Vergleichskriterien

$0 \leq |a_k| = b_k \forall \epsilon > k_0$ und $\sum_{k=0} b_k$ konvergent so folgt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ auch konvergent.

?-Kriterium $a_k = 0$ für $k = ?$ und konvergent $(\frac{a_{k+1}}{a_k})$ so gilt

$$\lim_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \; absolut\ konvergent$$

$$\lim_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| > 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \; nicht\ konvergent$$

Falls $\lim_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{k}|$ kann keine eindeutige Aussage getroffen werden.

Wurzelkriterium $\forall k > k_0$.

$$\sqrt[k]{a_k} \leq q < 1 \;\text{ für } ??q \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$

Beispiele kein Bock gehabt mitzuschreiben ...

1.3 Folgen von Funktionen

$f_k : [a, b] \to \mathbb{R}$

Definition 3. (f_k) *konvergiert punktweise gegen* $f.[a, b] \to \mathbb{R}$ *falls*

$$\forall x \in [a, b] : \lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$$

Hier kann die Konvergenzgeschwindigkeit von einzelnen x abhängen. Wenn man das ausschließen möchte, dass es ungleichmäßig ist, braucht man die gleichmäßige Knvergenz:

Definition 4. (f_k) *gleichmäßig konvergent gegen* f *falls*

$$\forall \epsilon > 0 \exists x_0 \forall x > x_0 \forall x \in [a, b] : |f(x) - f_n(x)| < \epsilon$$

Satz 1. *? f_k stetig und f_k auf f gleichmäßig konvergent, dann ist auch f stetig.*

Beweis 1. $\forall \epsilon \exists x_0 \forall x > x_0 \forall x |f(x) - f_n(x)| < \epsilon$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f_{n_0}(x) - f(x_0)| - 2\epsilon \to 0 \end{aligned}$$

Satz 2 (Integration und Differenziation der Grenzfunktion).

1. *$(f_k) \to f$ gleichmäßig konvergent und ? f_k stetig. Dann gilt*

$$\int_a^b (\lim_{k\to\infty} f_k(x))dx = \int_a^b f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)dx$$

2. *$f_k \to f$ punktweise konvergent, alle f_k stetig differenzierbar und Folge (f_k) ist gleichmäßig konvergent, dann folgt*

$$f'(x) = (\lim_{k\to\infty} f_k(x))' = \lim_{k\to\infty} f_k'(x)$$

Vorsicht $f_k(x)$ und $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$. f_k hat Knickpunkte in $(0,0), (\frac{1}{k}, k), (\frac{2}{k}, 0)$ Was ist die Grenzfunktion? Diese ist $f(x) = 0$ für $x \in [0,2]$. Das Integral von $\int_a^b f_k dx = 1$, aber das der Grenzfunktion ist 0!

1.4 Potenzreihe

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Das Ziel ist $f(x)$ über $[a,b]$ als Potenzreihe darzustellen. Wir interessieren uns für$M = \{x \in \mathbb{R} | \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergent$\}$.

$$R = \begin{cases} \sup\{x \in M\} & M \text{ beschränkt} \\ \infty & M \text{ unbeschränkt} \end{cases}$$

heißt Konvergenzradius der Potenzreihe.
Es gibt drei Möglichkeiten: $R = 0$, R ?, $R = \infty$

1. $\sum_{k=0}^{\infty} kx^k$ da ist dann $R = 0$ weil für $x \neq 0$ keine Nullfolge.
2. $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ da ist $R = 1$
3. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ hier ist dann $R = \infty$